

## Zobrazování dráhy letu dělových střel.

Je známo, že pokusy o znázornění vzdušné dráhy dělové střely nejenom matematickým vzorcem, ale též křivkou skutečnému průběhu co nejvíce odpovídající je mnoho více méně přesných. Křivka znázorňující dráhu střely, má-li mít praktickou cenu (t. j. aby z ní bylo možno odvodit některé jednoduché a často používané matematické vztahy), musí mít tuto zásadní vlastnost: k jejímu sestrojení (vypočtení nebo nakreslení), na rozdíl od skutečné balistické křivky, musí být použito jen známých veličin, t. j. úhlů dostřelu a doletu, dálky střelby, doby letu a počáteční rychlosti (nalezneme je v tabulkách střelby).

Je najevo, že co do jednoduchosti by vyhovovala nejlépe parabola, která je znázorněním dráhy střely ve vzduchoprázdnotě, jež se však značně liší od skutečné dráhy střely ve vzduchu, t. j. od balistické křivky (vyjímajíc při velmi malých počátečních rychlostech a při velkém zatížení příčného průřezu střely).

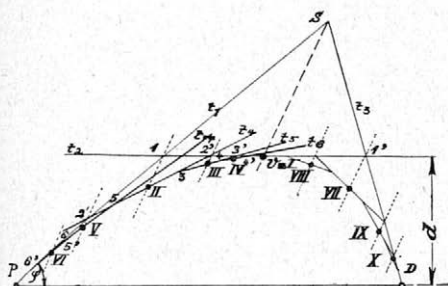
Jedním z četných pokusů o rychlé a přibližné grafické sestrojení dráhy střely ve vzduchu je následující řešení, které, i když není nové, je do té míry zajímavé, že není na škodu se o něm zmínit podrobněji (mjr. ing. Schmidt je uvádí v časopise „Wehrtechnische Monatshefte“, č. 4—38, velmi obsírně):

Předpokládejme, že můžeme použít rovnice, vyjadřující výšku vrcholu na dráze střely ve vzduchoprázdnotě, jakožto velmi přibližného řešení i pro skutečné poměry, ve vzduchu:

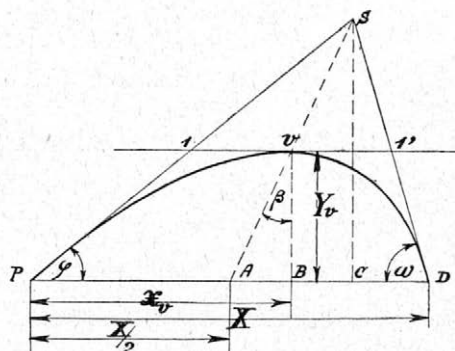
$$Y_v = \frac{gT^2}{8},$$
 kde  $Y_v$  je výška vrcholu (pořadnice v pravoúhlém systému souřadnicovém).

Je zřejmé, že křivkou skutečným poměrům nejlépe odpovídající je parabola, určená počátkem, úhlem výstřelu, výškou vrcholu a délkou střelby (t. j. v našem případě počátkem, bodem dopadu střely a dvěma tečnami, v počátku a ve vrcholu). Osa této paraboly však není svislá, kolmá k vodorovné rovině ústí hlavně, jako při theoretické střelbě ve vzduchoprázdnotě (předpokládáme, že ústí hlavně a cíl jsou ve vodorovné rovině).

Parabolu je možno zobrazit velmi jednoduše a rychle tak, že sestrojíme nejprve řadu bodů této křivky a k nim příslušné tečny, které křivku obalují. Konstrukce křivky je založena na známé vlastnosti paraboly, že spojnice pŕíleších bodů dvou tečen (t. j. úseků na tečnách od tečného bodu až k pŕisečniku obou tečen) je novou tečnou paraboly, která je tečným bodem rozpŕlena. Obr. 1.



Obr. 1.



Obr. 2.

V počátku  $P$  sestrojíme tečnu  $t_1$ , svírající s rovinou ústí hlavně úhel výstřelu  $\varphi$ , a pak ve vzdálenosti  $d = 1,23 T^2$  narýsujeme rovnoběžku s vodorovnou rovinou ústí hlavně. Tato rovnoběžka je tečnou  $t_2$  ve vrcholu paraboly  $V$  a protíná tečnu  $t_1$  v bodu 1. Vzdálenost  $P1$  naneseme nyní na tečnu  $t_1$  z bodu 1, takže  $P1 = IS$ . Spojíme-li nyní bod  $S$  s bodem dopadu  $D$ , vodorovná tečna  $t_2$  seče tuto spojnici v bodě  $I'$ . Rozpŕlením úsečky  $I1'$  dostaneme vrchol paraboly  $V$ . Spojnice  $SD$  je pak tečnou  $t_3$  v bodě dopadu  $D$  a vrchol  $V$  tečným bodem rovnoběžné tečny  $t_1$ . Rozpŕlením vzdálenosti  $P1$  vznikne bod 2, vzdálenosti  $I'V$  bod  $2'$ , rozpŕlením úsečky  $22'$  pak bod  $II$ ; rozpŕlením  $2'II$  vznikne bod 3, rozpŕlením  $2'v$  pak bod  $3'$  rozpŕlením spojnice  $33'$  bod  $III$ , rozpŕlením  $3'III$  vznikne bod 4, rozpŕlením  $3'v$  bod  $4'$  a rozpŕlením spojnice  $44'$  pak bod  $IV$ . Podobně rozpŕlením úsečky  $II2$  vznikne bod 5 a rozpŕlením  $2P$  bod  $5'$ . Rozpŕlením  $55'$  vznikne bod  $V$ . Podobně dalším postupem, z obrázku zřejmým, určíme body  $VII$  až  $X$  na sestupném oblouku křivky. Body  $I-X$  jsou body křivky a pŕímky, na pŕ.  $t_1$  až  $t_7$ , pak tečnami v těchto bodech. O správnosti konstrukce se pŕesvědčíme tím, že spojnice  $III$ ,  $2'III$ ,  $3'IV$ ,  $2'V$  atd. jsou spolu rovnoběžné. Nakreslení křivky s pomocí 8 bodů postačí úplnĕ, neboť tečen je dostatečný počet.

Na základĕ jednoduchých geometrických vztahů možno též odvodit některé užitečné vzorce, na pŕ. úhel doletu  $\omega$ , pro úsečku vrcholu  $x_v$  (s pomocí úhlu výstřelu  $\varphi$ , dálky  $X$  a doby letu  $T$ ). Obr. 2. S pomocí úhlu výstřelu  $\varphi$ , dálky  $X$  a doby letu  $T$  je možno vyjádřit též konečnou rychlost  $v_s$ . Potřebné vzorce si odvodíme takto:

$$\text{protože } I'v = \frac{1}{2} I1', \text{ je též } PA = \frac{1}{2} PD = \frac{X}{2}$$

$$x_v = \frac{X}{2} + AB$$

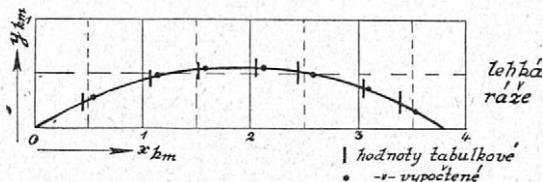


Naše křivka  $PVD$  je částí paraboly  $PVDD_1$ , která představuje dráhu střely ve vzduchoprázdnosti pod vlivem síly  $g^*$  při střelbě v rovině ústí hlavně  $PD_1$ , odchýlené o úhel  $\varphi$  od roviny vodorovné. Síla  $g^*$  působí ve směru osy paraboly, nahrazuje tíži zemskou. Můžeme ji považovat za vektorový součet skutečné tíže zemské  $g$  a přídavné síly  $g_1$ , která působí nazad (je to vlastně odpor vzduchu). Je-li  $g^*$  a  $g$  na celé dráze letu konstantní, je i  $g_1$  konstantní. Složka rychlosti je kolmá na směr působící síly, tedy složka ve směru  $PD_1$  je konstantní.

Pak  $v_0 \cdot \cos(\varphi + \beta) = v_k \cdot \cos(\omega - \beta)$  a z toho

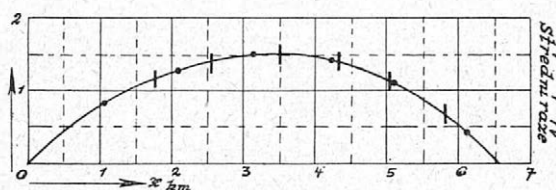
$$d) v_k = v_0 \frac{\cos(\omega + \beta)}{\cos(\omega - \beta)}$$

Hranice tohoto způsobu znázornění dráhy střely ve vzduchu je možno zjistit (co do přesnosti se skutečnosti) touto úvahou: Bylo již řečeno, že se střela pohybuje tak jako ve vzduchoprázdnosti, jen pod vlivem síly  $g^*$ . Parabola vzniká tedy tak, že místo skutečného, proměnlivého (co do směru i velikosti) odporu vzduchu působí na celé dráze střely odpor konstantní. A protože skutečná hodnota délky střelby je prvkem k určení naší přibližné paraboly, projevuje se konstantní síla  $g$ , tak, že má na délku střelby týž celkový vliv jako skutečný odpor vzduchu. Vzájemný souhlas není nijak nápadný, neboť obě hodnoty, délka  $X$  i doba  $T$  jsou takřka „úplně integrované veličiny“. V tom však je též slabost tohoto způsobu, že nelze určit jen z počátečních prvků předem délku střelby nebo jinou konečnou hodnotu.



Obr. 4.

Je najevidě, že naše parabola nemůže také plně souhlasit se skutečnou dráhou střely při střelbě horní skupinou úhlů. Obrazy 4 a 5 znázorňují dráhy střel různých ráží i počátečních rychlostí. Čím plošší je totiž dráha střely, tím užší jsou hranice, v nichž se mění odpor vzduchu (co do směru i rychlosti) a tím bližší je pak vzájemný souhlas. Při použití měřítka 1:25000 je přesnost úplná a úspora práce i času značná. Předpoklad konstantního odporu vzduchu rovněž lépe vyhovuje.



Obr. 5.

Dále je nutno ještě podotknout, že chyba, které se dopouštíme, když za  $Y$  klademe hodnotu  $1,23 T^2$ , je všeobecně tím větší, čím strmější je dráha střely, takže při skutečně strmé dráze střely je poloha vrcholové tečny naší paraboly nesprávná (t. j. tečna leží níže).

V následujících tabulkách jsou uvedeny hodnoty úhlů doletu jednak vypočtené podle rovnice b), jednak skutečné (podle tabulek střelby) pro různé druhy děl i střel. Délky a doby letu uvedeny nejsou (z pochopitelných důvodů). I tu vidíme, jako na obrázku, velmi dobrou shodu se



## a) Dělo střední ráže.

| $v_0$<br>m/vteř. | $\varepsilon$<br>úhel záměrný | $\varphi$<br>úhel výstřelu | $\omega$<br>vypočtené | $\omega$<br>z tabulek<br>střelby | Chyba<br>% |
|------------------|-------------------------------|----------------------------|-----------------------|----------------------------------|------------|
|                  | d í l c ů                     |                            |                       |                                  |            |
| 210              | 93                            | 96                         | 97                    | 98                               | — 1,0      |
|                  | 233                           | 236                        | 240                   | 243                              | — 1,2      |
|                  | 483                           | 486                        | 523                   | 517                              | + 1,2      |
|                  | 683                           | 686                        | 730                   | 731                              | — 0,1      |
| 230              | 327                           | 330                        | 345                   | 348                              | — 0,9      |
|                  | 400                           | 403                        | 432                   | 430                              | + 0,5      |
|                  | 483                           | 486                        | 514                   | 521                              | — 1,3      |
|                  | 683                           | 686                        | 737                   | 737                              | ± 0,0      |
| 250              | 327                           | 330                        | 348                   | 352                              | — 1,1      |
|                  | 400                           | 403                        | 433                   | 435                              | — 0,5      |
|                  | 483                           | 486                        | 523                   | 530                              | — 1,3      |
|                  | 683                           | 686                        | 745                   | 747                              | — 0,3      |
| 280              | 93                            | 96                         | 97                    | 100                              | — 3,0      |
|                  | 233                           | 236                        | 251                   | 252                              | — 0,4      |
|                  | 483                           | 486                        | 536                   | 539                              | — 0,6      |
|                  | 683                           | 686                        | 748                   | 757                              | — 1,2      |
| 320              | 303                           | 306                        | 97                    | 100                              | — 1,2      |
|                  | 400                           | 403                        | 251                   | 252                              | + 0,7      |
|                  | 483                           | 486                        | 536                   | 539                              | + 0,2      |
|                  | 683                           | 686                        | 748                   | 757                              | — 0,6      |
| 375              | 93                            | 96                         | 111                   | 108                              | + 2,8      |
|                  | 233                           | 236                        | 267                   | 273                              | — 2,2      |
|                  | 483                           | 486                        | 569                   | 573                              | — 0,7      |
|                  | 683                           | 686                        | 790                   | 794                              | — 0,5      |
| 435              | 233                           | 236                        | 292                   | 297                              | — 1,7      |
|                  | 400                           | 403                        | 505                   | 505                              | ± 0,0      |
|                  | 483                           | 486                        | 603                   | 602                              | + 0,2      |
|                  | 683                           | 686                        | 820                   | 818                              | + 0,2      |
| 520              | 300                           | 302                        | 427                   | 424                              | + 0,7      |
|                  | 401                           | 403                        | 554                   | 552                              | + 0,4      |
|                  | 484                           | 486                        | 653                   | 649                              | + 0,6      |
|                  | 684                           | 686                        | 864                   | 856                              | + 0,9      |

## b) Dělo malé ráže.

| $v_0$<br>m/vteř. | $\varepsilon$<br>úhel záměrný | $\varphi$<br>úhel výstřelu | $\omega$<br>vypočtené | $\omega$<br>z tabulek<br>střelby | Chyba<br>% |
|------------------|-------------------------------|----------------------------|-----------------------|----------------------------------|------------|
| d í l c ů        |                               |                            |                       |                                  |            |
| 200              | 95                            | 100                        | 101                   | 102                              | — 1,0      |
|                  | 235                           | 240                        | 227                   | 252                              | — 9,9      |
|                  | 485                           | 490                        | 534                   | 530                              | + 0,8      |
|                  | 685                           | 690                        | 746                   | 751                              | — 0,7      |
| 232              | 94                            | 98                         | 99                    | 101                              | — 2,0      |
|                  | 234                           | 238                        | 250                   | 254                              | — 1,6      |
|                  | 484                           | 488                        | 535                   | 541                              | — 1,1      |
|                  | 684                           | 688                        | 751                   | 759                              | — 1,1      |
| 264              | 93                            | 96                         | 103                   | 100                              | + 3,0      |
|                  | 233                           | 236                        | 251                   | 256                              | — 2,0      |
|                  | 483                           | 486                        | 549                   | 550                              | — 0,2      |
|                  | 683                           | 686                        | 790                   | 774                              | + 2,1      |
| 317              | 93                            | 96                         | 97                    | 102                              | — 4,3      |
|                  | 233                           | 236                        | 262                   | 266                              | — 0,3      |
|                  | 484                           | 486                        | 570                   | 573                              | — 0,5      |
|                  | 684                           | 686                        | 812                   | 799                              | — 0,7      |
| 391              | 94                            | 98                         | 110                   | 115                              | — 4,3      |
|                  | 234                           | 238                        | 290                   | 291                              | — 0,3      |
|                  | 484                           | 488                        | 601                   | 604                              | — 0,5      |
|                  | 684                           | 688                        | 822                   | 828                              | — 0,7      |
| 470              | 233                           | 236                        | 326                   | 323                              | + 0,9      |
|                  | 400                           | 403                        | 536                   | 540                              | — 0,7      |
|                  | 483                           | 486                        | 647                   | 641                              | + 0,9      |
|                  | 683                           | 686                        | 867                   | 862                              | + 0,6      |

## c) Dělo malé ráže, střelba horní skupinou úhlů.

|       |      |      |      |      |       |
|-------|------|------|------|------|-------|
| 95    | 980  | 988  | 1022 | 1025 | — 0,3 |
|       | 1194 | 1202 | 1248 | 1253 | — 0,4 |
| 112   | 1137 | 1145 | 1210 | 1212 | — 0,2 |
|       | 1255 | 1263 | 1333 | 1336 | — 0,2 |
| 134   | 1038 | 1046 | 1093 | 1094 | — 0,1 |
|       | 1189 | 1197 | 1235 | 1244 | — 0,7 |
| 172,5 | 1082 | 1090 | 1152 | 1157 | — 0,4 |
|       | 1240 | 1248 | 1307 | 1318 | — 0,8 |
| 221   | 1179 | 1187 | 1247 | 1280 | — 2,6 |
|       | 1259 | 1267 | 1350 | 1352 | — 0,1 |

skutečností; průměrná chyba nepřesahuje 1%. Zato konečné rychlosti (v tabulkách nejsou uvedeny), vypočtené podle rovnic c) a d), jsou vesměs příliš vysoké; jen u zcela plochých drah střely je chyba menší, u strmějších pak stoupá až na 30%. (Viz tabulky.)

Dříve nežli si vysvětlíme tyto značné odchylky od skutečných poměrů, je nutno ukázat, že naše  $g^*$  obsahuje zpětnou složku, že tedy

$$(g^*) > \frac{(g)}{\cos \beta}.$$

Dálka střelby v šikmé rovině, odkloněné o úhel  $\beta$  od roviny vodorovné, ve vzduchoprázdnotě při úhlu výstřelu

$$X\dot{s} = \frac{2 v_0^2 \sin \varphi \cdot \cos (\beta + \varphi)}{g \cdot \cos^2 \beta}$$

Předpokládejme, že směr síly  $g^*$  je svislý. Je-li však  $(g^*) > \frac{(g)}{\cos \beta}$ , bude skutečná délka střelby vlivem  $g^*$  kratší nežli délka, dosažená theoreticky při vlivu síly téhož směru hodnoty  $\frac{g}{\cos \beta}$ .

Bude tedy:

$$X < \frac{v_0^2 \cdot \sin \varphi \cos (\beta + \varphi)}{\frac{g}{\cos \beta} \cos^2 \beta} \text{ a po úpravě výrazu}$$

$$X < \frac{v_0^2 \cdot 2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi (\cos \beta - \operatorname{tg} \varphi \cdot \sin \beta)}{g \cos \beta}$$

$$X < \frac{v_0^2 \cdot \sin 2 \varphi}{g} (1 - \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \beta)$$

$$\text{ale } \frac{v_0^2 \cdot \sin 2 \varphi}{g} = \frac{4 Y v}{\operatorname{tg} \varphi}$$

$Y_v$  je výška vrcholu dráhy letu při střelbě na vodorovné rovině pod úhlem výstřelu  $\varphi$  ve vzduchoprázdnotě. Obě strany rovnice udávají délku střelby této dráhy letu.

$$\frac{X \cdot \operatorname{tg} \varphi}{4 Y v} < (1 - \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \beta) \text{ z rovnice c dosadíme za } \operatorname{tg} \beta:$$

$$\frac{X \cdot \operatorname{tg} \varphi}{4 Y v} < 1 - \operatorname{tg} \varphi (\cotg \varphi - \frac{X}{4 Y v})$$

$$\frac{X \cdot \operatorname{tg} \varphi}{4 Y v} < \frac{X \cdot \operatorname{tg} \varphi}{4 Y v}, \quad \text{bude-li } X \neq 0, \text{ pak}$$

$$Y v > y, \text{ neboli (protože } Y g = \frac{g T^2}{8} \text{):}$$

$T$  ve vzduchoprázdnotě  $> T$  ve vzduchu.

Seznáme, že vrchol dráhy střely ve vzduchoprázdnotě je položen výše nežli ve vzduchu, neboli že doba letu střely ve vzduchoprázdnotě je delší nežli ve vzduchu.