

Kapitán děl. František Veselý:

## Početní řešení zpětného protínání.

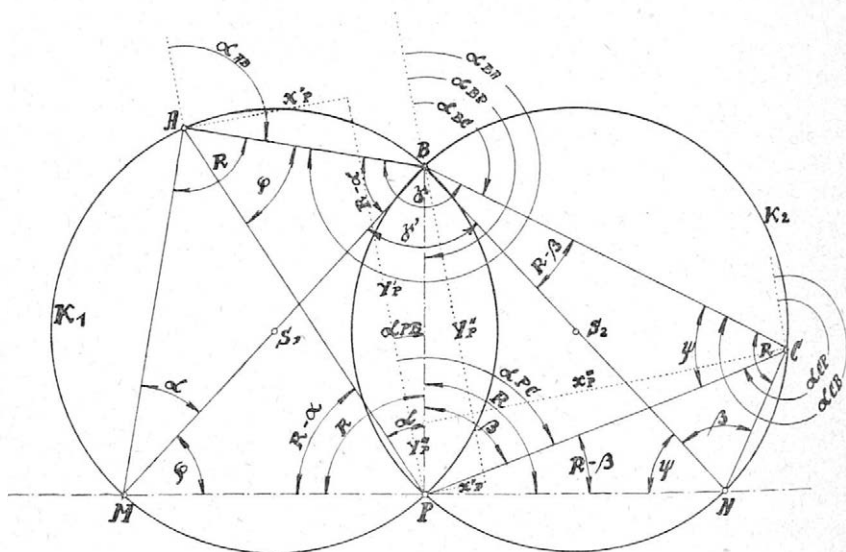
Jako doplněk k článku „Grafické určení souřadnic stanoviště“ v DR. roč. V. (1935), čís. 6, str. 815 (183), předkládám čtenářům názorné početní řešení oněch grafických způsobů řešení zpětného protínání.

### A. Početní řešení Pothenotova problému.

Početní řešení Pothenotova problému záleží v základě ve vyřešení úhlů  $\varphi$  a  $\psi$ , jež jsou dány na počátku početní operace svým součtem  $\varphi + \psi = 4R - (\alpha + \beta + \gamma)$  ve čtyřúhelníku  $ABCP$  a potomním převedením úlohy na výpočet souřadnic bodu jako při protínání vpřed.

Kromě obvyklých způsobů možno potřebné úhly  $\varphi$  a  $\psi$  vypočítat přímo tangentsovou větou. Toto řešení se hodí hlavně pro začátečníky, neboť je velmi názorné. Počítající vidí celý postup řešení před sebou, při počítání jasně vidí, jak daleko celý pochod početní postoupil, a početní postup je při tom zjednodušen na základní trigonometrické operace.

Níže uvedené řešení odpovídá poměrům v obraze 1, kde úhly  $\alpha$  a  $\beta$  jsou menší než  $90^\circ$ ; obecný postup řešení bude uveden dále.



Obr. 1.

Jak vidět z obrazu, máme ve čtyřúhelníku  $ABCP$  dány tyto veličiny:

1. délky  $\overline{AB}$  a  $\overline{BC}$ , které se vypočtou ze souřadnic bodů  $A (X_A, Y_A)$ ,  $B (X_B, Y_B)$  a  $C (X_C, Y_C)$ ;
2. úhel  $\gamma$ , který je dán rozdílem směrnic stran  $\overline{BA}$  a  $\overline{BC}$ .  $\gamma = \alpha_{BA} - \alpha_{BC}$ .

Směrnice  $\alpha_{BA}$  a  $\alpha_{BC}$  se vypočtou taktéž ze souřadnic bodů  $A, B$  a  $C$ ;

3. úhly  $\alpha$  a  $\beta$ , měřené ze stanoviště bodu  $P$ , jehož souřadnice hledáme.

Úhly  $\varphi$  a  $\psi$ , jež jsou potřebné jako podmínka řešitelnosti trojúhelníka  $ABP$  a  $BCP$ , jsou dány svým součtem ve čtyřúhelníku  $ABCP$ , t. j.  $\varphi + \psi = 4R - (\alpha + \beta + \gamma)$ .

Najdeme-li nějaký matematický výraz, z něhož bude možno vypočítat rozdíl těchto úhlů, můžeme algebraickým řešením obou výrazů vypočíst hodnoty  $\varphi$  a  $\psi$ .

Tento požadavek splňuje *tangentová věta*, neboť udává vztah mezi součtem a rozdílem stran v trojúhelníku a tangenty součtu a rozdílu protilehlých polovičních úhlů.

Jak je zřejmo z obrazce, leží body  $A, B, P, M$  na kružnici  $K_1$ , okolo všech těchto bodů opsané; podobně i body  $B, C, P, N$  leží na opsané kružnici  $K_2$ . Body  $M$  a  $N$  jsou dány průsečíky sečen, jdoucích z bodu  $B$  středy  $s_1$  a  $s_2$ , s kružnicemi  $K_1$  a  $K_2$ ; jsou tedy délky  $BM$  a  $BN$  průměry kružnic  $K_1$  a  $K_2$ . Obvodové úhly nad průměry se rovnají  $R$ , t. j.  $90^\circ$ , proto v stanovišti  $P$  musí být obvodové úhly proti průměrům  $BM$  a  $BN$  rovny  $R$ , neboli bod  $P$  musí ležet na spojnici bodů  $M$  a  $N$ , v jejím průsečíku s kolmicí spuštěnou na ni z bodu  $B$ . Bod  $P$  leží zároveň v průsečíku obou kružnic  $K_1$  a  $K_2$ , podobně jako bod  $B$  leží v protilehlém průsečíku kružnic  $K_1$  a  $K_2$ , neboť kružnice  $K_1$  a  $K_2$  jsou geometrickými místy stejných obvodových úhlů  $\alpha$  a  $\beta$  nad danými tětivami  $AB$  a  $BC$ .

Úhly  $(R - \alpha)$  a  $(R - \beta)$  u bodu  $P$  jsou obvodovými úhly nad tětivami  $AM$  a  $CN$ , a jsou stejně velké jako stejnohlé úhly  $(R - \alpha)$  a  $(R - \beta)$  nad těmito tětivami u bodu  $B$ . Z toho plyne, že úhel  $\gamma' = \gamma - [(R - \alpha) + (R - \beta)]$ , neboli, že  $\gamma' = \gamma - [2R - (\alpha + \beta)]$ . Můžeme také napsat  $\gamma' = \alpha + \beta + \gamma - 2R$ .

Podobně i úhly  $\varphi$  nebo  $\psi$ , které jsou obvodovými úhly na kružnicích  $K_1$  a  $K_2$  proti společné tětivě  $RP$ , musí být stejně velké jak u bodu  $A$ , tak u bodu  $M$  na kružnici  $K_1$  (úhel  $\varphi$ ), nebo u bodu  $C$  nebo  $N$  na kružnici  $K_2$  (úhel  $\psi$ ).

Z toho vidíme, že v trojúhelníku  $MBN$ , jehož dvě odvěsny tvoří průměry kružnic  $K_1$  a  $K_2$ , máme dán vrcholový úhel  $\gamma'$  a že hledané úhly  $\varphi$  a  $\psi$  jsou zbývající dva úhly tohoto trojúhelníka.

Abychom mohli použít *tangentové věty* k výpočtu neznámých úhlů  $\varphi$  a  $\psi$  z tohoto trojúhelníka, musíme znát ještě jeho obě odvěsny  $BM$  a  $BN$ .

Strany  $BM$  a  $BN$  trojúhelníka  $MBN$  vypočteme z délek  $AB$  a  $BC$ . Vidíme, že trojúhelník  $ABM$  je pravoúhlý a máme v něm danu stranu  $AB$  a úhel  $\alpha$ . Trojúhelník  $BCN$  je také pravoúhlý a máme v něm danu stranu  $BC$  a úhel  $\beta$ . Z těchto veličin vypočteme pak strany  $BM$  a  $BN$  ze vzorců

$$\overline{BM} = \frac{\overline{AB}}{\sin \alpha} \quad \text{a} \quad \overline{BN} = \frac{\overline{BC}}{\sin \beta}.$$

Délky  $AB$  a  $BC$  vypočtu známým způsobem ze souřadnic bodů  $A (X_A, Y_A)$ ,  $B (X_B, Y_B)$  a  $C (X_C, Y_C)$  takto:

Vypočteme směrníky  $\alpha_{AB}$ ,  $\alpha_{BA}$  a  $\alpha_{BC}$ ,  $\alpha_{CB}$  ze souřadnic bodů  $A, B$  a  $C$  ze vzorce  $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A}$ ; k tomuto výrazu najdeme hodnotu úhlu  $\alpha_1$

a jeho sinus a vypočteme směrníky  $\alpha_{BA}$  a  $\alpha_{AB}$   $\alpha_{AB} = 2R - \alpha_1$ ,  $\alpha_{BA} = 4R - \alpha_1$ . Podobně vypočtem směrníky  $\alpha_{BC}$  a  $\alpha_{CB}$  ze vzorce  $\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{X_C - X_B}{Y_C - Y_B}$  najdeme hodnotu  $\alpha_2$  a jeho sinus a směrníky  $\alpha_{BC}$  a  $\alpha_{CB}$   $\alpha_{BC} = 2R - \alpha_2$ ,  $\alpha_{CB} = 4R - \alpha_2$ .

$$\text{Délky } \overline{AB} \text{ a } \overline{BC} \text{ pak jsou: } \overline{AB} = \frac{X_B - X_A}{\sin \alpha_1}; \overline{BC} = \frac{X_C - X_B}{\sin \alpha_2}.$$

Dosadíme za hodnoty  $\overline{AB}$  a  $\overline{BC}$  do rovnic pro délky  $\overline{BM}$  a  $\overline{BN}$  a dostaneme délky  $\overline{BM}$  a  $\overline{BN}$ .

Rozdílem směrníků získáme úhel  $\gamma$ , potřebný k výpočtu  $\gamma'$

$$\gamma = \alpha_{BA} - \alpha_{BC} \text{ a } \gamma' = \alpha + \beta + \gamma - 2R.$$

Tím máme v trojúhelníku  $MBN$  dány tyto podmínky: Dvě strany o velikosti  $\overline{BM}$  a  $\overline{BN}$  a úhel  $\gamma'$  jimi sevřený a můžeme již vypočíst úhly  $\varphi$  a  $\psi$ .

První podmínka je:  $\varphi + \psi = 4R - (\alpha + \beta + \gamma) = 2R - \gamma'$ , což se rovná nějaké hodnotě  $\omega_1$ .

$$\text{Druhá podmínka je: } \operatorname{tg} \frac{\psi - \varphi}{2} = \frac{\overline{BM} - \overline{BN}}{\overline{BM} + \overline{BN}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\psi + \varphi}{2}.$$

Dosadíme hodnoty  $\overline{BM}$ ,  $\overline{BN}$  a hodnotu  $\frac{\psi + \varphi}{2} = \frac{\omega_1}{2}$ ; vyčíslením dostaneme hodnotu  $\operatorname{tg} \frac{\psi - \varphi}{2}$  a najdeme úhel jí příslušející. Zdvojnásobíme jej a dostaneme úhel  $\psi - \varphi$ , rovnající se nějaké hodnotě, na př.  $\omega_2$ .

Pak máme rovnice:

$$\psi + \varphi = \omega_1, \quad \psi - \varphi = \omega_2.$$

Sečtením a odečtením obou rovnic dostaneme pak přímo dvojnásobné hodnoty  $\psi$  a  $\varphi$ .

Tím máme v trojúhelníku  $ABP$  dány úhly  $\alpha$  a  $\varphi$  a stranu  $\overline{AB}$ . Zbývajících úhel je dán výrazem:  $2R - (\alpha + \varphi)$ . Podobně v trojúhelníku  $BCP$  máme dány úhly  $\beta$  a  $\psi$  a stranu  $\overline{BC}$ . Zbývajících úhel jest dán výrazem:  $2R - (\beta + \psi)$ .

V trojúhelníku  $BMP$  máme dány úhly:  $\varphi$  a  $R$ , třetí úhel je  $(R - \varphi)$  a stranu  $\overline{BM}$ . V trojúhelníku  $BNP$  máme úhly  $\psi$  a  $R$ , třetí úhel je  $(R - \psi)$  a stranu  $\overline{BN}$ .

K výpočtu souřadnic bodu  $P$  potřebujeme ještě znát stranu  $\overline{BP}$  a strany  $\overline{AP}$  a  $\overline{CP}$ .

Stranu  $\overline{BP}$  můžeme vypočíst sinovou větou buď z trojúhelníka  $ABP$ :  $\overline{BP} = \overline{AB} \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha}$ , nebo sinovou větou z trojúhelníka  $BCP$ :  $\overline{BP} = \overline{BC} \frac{\sin \psi}{\sin \beta}$ ; snáze vypočteme délku  $\overline{BP}$  z pravoúhlých trojúhelníků  $BMP$  nebo  $BNP$ :  $\overline{BP} = \overline{BM} \sin \varphi$ ;  $\overline{BP} = \overline{BN} \sin \psi$ .

Stranu  $\overline{AP}$  vypočteme z trojúhelníka  $ABP$  sinovou větou:

$$\overline{AP} = \overline{BP} \cdot \frac{\sin [2R - (\alpha + \varphi)]}{\sin \varphi}, \text{ nebo: } \overline{AP} = \overline{AB} \cdot \frac{\sin [2R - (\alpha + \varphi)]}{\sin \alpha}$$

Podobně vypočteme i stranu  $\overline{CP}$  z trojúhelníka  $BCP$ :

$$\overline{CP} = \overline{BP} \cdot \frac{\sin [2R - (\beta + \psi)]}{\sin \psi}, \text{ nebo: } \overline{CP} = \overline{BC} \cdot \frac{\sin [2R - (\beta + \psi)]}{\sin \beta}$$

Tím máme vypočteny v trojúhelnících  $ABP$  a  $BCP$  všechny potřebné hodnoty a můžeme již počítat souřadnice bodu  $P$  ( $X_P, Y_P$ ).

$$x'_P = \overline{AP} \sin \alpha_{AP}; \quad y'_P = \overline{AP} \cos \alpha_{AP},$$

při čemž  $\alpha_{AP} = \alpha_{AB} + \varphi$ ,

$$X'_P = X_A + x'_P; \quad Y'_P = Y_A + y'_P$$

$$x''_P = \overline{BP} \sin \alpha_{PB}; \quad y''_P = \overline{BP} \cos \alpha_{PB},$$

při čemž  $\alpha = \alpha_{BP} - 2R$  a  $\alpha_{BP} = \alpha_{BC} + 2R - (\beta + \psi)$ , neboli  $\alpha_{PB} = \alpha_{BC} - (\beta + \psi)$ , jak je zřejmo z obrazce 1.

$$X''_P = X_B - x''_P; \quad Y''_P = Y_B - y''_P,$$

$$x'''_P = \overline{PC} \sin \alpha_{PC}; \quad y'''_P = \overline{PC} \cos \alpha_{PC},$$

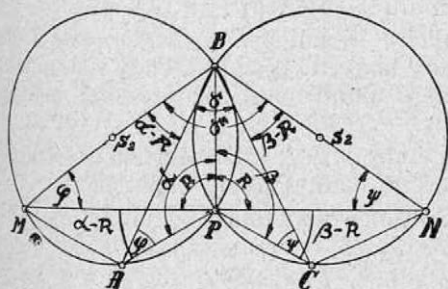
při čemž  $\alpha_{PC} = \alpha_{PB} + \beta = \alpha_{BC} - \beta - \psi + \beta = \alpha_{BC} - \psi$ .

$$X'''_P = X_C - x'''_P; \quad Y'''_P = Y_C - y'''_P.$$

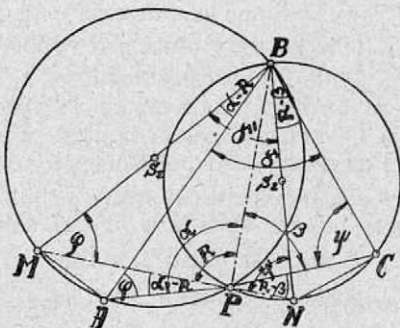
Souřadnice bodu  $P$  jsou aritmetickým středem všech vypočtených souřadnic

$$X_P = \frac{X'_P + X''_P + X'''_P}{3}; \quad Y_P = \frac{Y'_P + Y''_P + Y'''_P}{3}.$$

Tento výpočet platí pro polohu bodů v obraze 1 a pro velikost úhlů  $\alpha < R$  a rovněž  $\beta < R$ . Pro jiné polohy se liší jen směrníky stran, ale postup zůstává úplně stejný.



Obr. 2.



Obr. 3.

Jsou-li úhly  $\alpha$  a  $\beta > R$ , úhel  $\gamma' = \gamma + [(\alpha - R) + (\beta - R)]$  neboli opět  $\gamma = \alpha + \beta + \gamma - 2R$ , neboť oba úhly  $\varphi$  a oba úhly  $\psi$  jsou opět obvodovými úhly nad danou úsečkou  $BP$  a oba úhly  $(R - \alpha)$  a  $(R - \beta)$  jsou obvodové úhly nad tětivami  $AM$  a  $CN$  na kružnicích  $K_1$ . Totéž platí i pro ten případ, že úhly  $\alpha$  a  $\beta$  jsou od  $R$  v nestejném smyslu rozdílné.

To, co tu bylo pověděno, je zřejmé z obrazce 2 a 3.

Pravidla pro výpočet úhlu  $\gamma'$ .

## a) Obecné případy:

1. Oba úhly
- $\alpha$
- a
- $\beta$
- jsou
- $< R$
- .

$$\text{Pak } \gamma' = \gamma - [(R - \alpha) + (R - \beta)] = \alpha + \beta + \gamma - 2R.$$

2. Oba úhly
- $\alpha$
- a
- $\beta$
- jsou
- $> R$

$$\text{Pak } \gamma' = \gamma + [(\alpha - R) + (\beta - R)] = \gamma + [(\alpha + \beta) - 2R] = \alpha + \beta + \gamma - 2R.$$

3. Oba úhly jsou v různém smyslu od
- $R$
- různých velikostí:
- $\alpha < R$
- ,
- $\beta > R$
- .

$$\text{Pak } \gamma' = \gamma + [(\beta - R) - (R - \alpha)] = \alpha + \beta + \gamma - 2R.$$

Podobně i naopak.

## b) Zvláštní případy:

1. Oba úhly
- $\alpha$
- a
- $\beta$
- jsou rovny
- $R$
- .

Pak délky  $\overline{AB}$  a  $\overline{BC}$  jsou přímo průměry kružnic  $K_1$  a  $K_2$  neboli jsou rovny délkám  $\overline{BM}$  a  $\overline{BN}$  a úhel  $\gamma' = \gamma$ . Plyne to také z obecné rovnice pro úhel  $\gamma'$ , v níž za  $\alpha$  a  $\beta$  dosadíme  $R$ .

Výpočet je pak jednodušší o výpočet délek  $\overline{BM}$  a  $\overline{BN}$ .

Ostatní postup je obdobný jako dříve.

2. Úhel
- $\alpha = R$
- ,
- $\beta < R$
- .

Pak  $\overline{BM} = \overline{AB}$ ;  $\overline{BN}$  nutno vypočíst a úhel  $\gamma' = \gamma - (R - \beta) = \beta + \gamma - R$ , což plyne také z obecné rovnice pro  $\gamma'$ , v níž za  $\alpha$  dosadíme  $R$ .

3. Úhel
- $\alpha = R$
- , úhel
- $\beta > R$
- .

Pak  $\overline{BM} = \overline{AB}$ ;  $\overline{BN}$  nutno vypočísti a úhel  $\gamma' = \gamma + (\beta - R) = \beta + \gamma - R$ , jako výše.

Podobně je tomu naopak při úhlu  $\beta = R$  a  $\alpha$  odlišném od  $R$ .

Obecně tedy platí pro výpočet úhlu  $\gamma'$  rovnice:  $\gamma' = \alpha + \beta + \gamma - 2R$ .

Podmínka řešitelnosti je, že úhel  $\gamma'$  nesmí být roven nule. Je-li úhel  $\gamma'$  roven nule, znamená to, že všechny body, t. j. dané 3 body i stanoviště, leží na kružnici všem bodům opsané a úlohu nelze řešit žádnou metodou, ani graficky, ani početně.

Bude-li velikost úhlu  $\gamma'$  blízka nule, leží  $P$  blízko kružnice ostatním třem bodům opsané a určení souřadnic bodu  $P$  bude nepřesné.

Z velikosti úhlu  $\gamma'$  máme tedy zároveň kontrolu řešitelnosti úlohy.

Rekapitulace postupu výpočtu:

1. Výpočet směrnic  $\alpha_{AB}$ ,  $\alpha_{BA}$ ,  $\alpha_{BC}$  a  $\alpha_{CB}$  ze souřadnic bodů  $A$ ,  $B$  a  $C$ .
2. Výpočet úhlu  $\gamma$ .
3. Výpočet úhlu  $\gamma'$  a tím zároveň kontrola řešitelnosti úlohy.
4. Výpočet délek  $\overline{AB}$  a  $\overline{BC}$ :

$$\overline{AB} = \frac{X_B - X_A}{\sin \alpha_{BA}}$$

$$\overline{AB} = \frac{Y_B - Y_A}{\cos \alpha_{BA}}$$

$$\overline{BC} = \frac{X_C - X_B}{\sin \alpha_{BC}}$$

$$\overline{BC} = \frac{Y_C - Y_B}{\cos \alpha_{BC}}$$

5. Výpočet délek  $\overline{BM}$  a  $\overline{BN}$ :

$$\overline{BM} = \frac{\overline{AB}}{\sin \alpha} \quad \overline{BN} = \frac{\overline{BC}}{\sin \beta}$$

6. Výpočet úhlů  $\varphi$  a  $\psi$ :

$$\operatorname{tg} \frac{\psi - \varphi}{2} = \frac{\overline{BM} - \overline{BN}}{\overline{BM} + \overline{BN}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\psi + \varphi}{2}$$

$$\psi + \varphi = 2R - \gamma' = 4R - (\alpha + \beta + \gamma).$$

7. Výpočet délek  $\overline{BP}$ ,  $\overline{AP}$  a  $\overline{CP}$ .

$$\overline{BP} = \overline{AB} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha} \quad \overline{BP} = \overline{BC} \cdot \frac{\sin \psi}{\sin \beta} \text{ nebo:}$$

$$\overline{BP} = \overline{BM} \cdot \sin \varphi \quad \overline{BP} = \overline{BN} \cdot \sin \psi$$

$$\overline{AP} = \overline{BP} \cdot \frac{\sin [2R - (\alpha + \varphi)]}{\sin \varphi}; \quad \overline{AP} = \overline{AB} \cdot \frac{\sin [2R - (\alpha + \varphi)]}{\sin \alpha}$$

$$\overline{CP} = \overline{BP} \cdot \frac{\sin [2R - (\beta + \psi)]}{\sin \psi}; \quad \overline{CP} = \overline{BC} \cdot \frac{\sin [2R - (\beta + \psi)]}{\sin \beta}$$

8. Výpočet směrnic  $\alpha_{BP}$  a  $\alpha_{PB}$ ,  $\alpha_{AP}$  a  $\alpha_{PA}$ ,  $\alpha_{CP}$  a  $\alpha_{PC}$ .

9. Výpočet souřadnic  $X'_P$ ,  $X''_P$  a  $X'''_P$ ;  $Y'_P$ ,  $Y''_P$  a  $Y'''_P$ .

10. Utvoření aritmetického středu těchto souřadnic a tím stanovení bodu  $P$ .

Pro tento výpočet se dá sestavit jednoduchý formulář.

### B. Početní řešení Hansenova problému.

Hansenův problém záleží v určení souřadnic dvou bodů ze souřadnic dvou známých bodů.

Pro početní řešení Hansenova problému máme dány tyto podmínky: délku  $\overline{AB}$ , danou souřadnicemi bodů  $A$  ( $X_A$ ,  $Y_A$ ), a  $B$  ( $X_B$ ,  $Y_B$ ) a úhly  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  a  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$  měřené ze stanovišť  $P_1$  a  $P_2$ , jejichž souřadnice vypočítá je naší úlohou. Úhel  $\beta_1$  je měřen od bodu  $B$  k neznámému bodu  $P_2$  a úhel  $\beta_2$  je měřen od bodu  $B$  k neznámému bodu  $P_1$  tak, že úhly  $\beta_1$  a  $\beta_2$  mají společné jedno rameno.

Celkem rozeznáváme při řešení Hansenova problému čtyři polohy bodů, což má za následek i odchylky v řešení.

Chci tu ukázat postup řešení Hansenova problému, jenž je analogický pro řešení všech poloh bodů. Postup je určen také hlavně pro začátečníky, neboť jest jednoduchý a názorný.

Výpočet při ostatních polohách se liší jediné ve výpočtu pomocných bodů, jichž k řešení používáme.

Pro začátek bereme body v poloze jedna, postup dalšího řešení odpovídá poměrům v obraze 4.

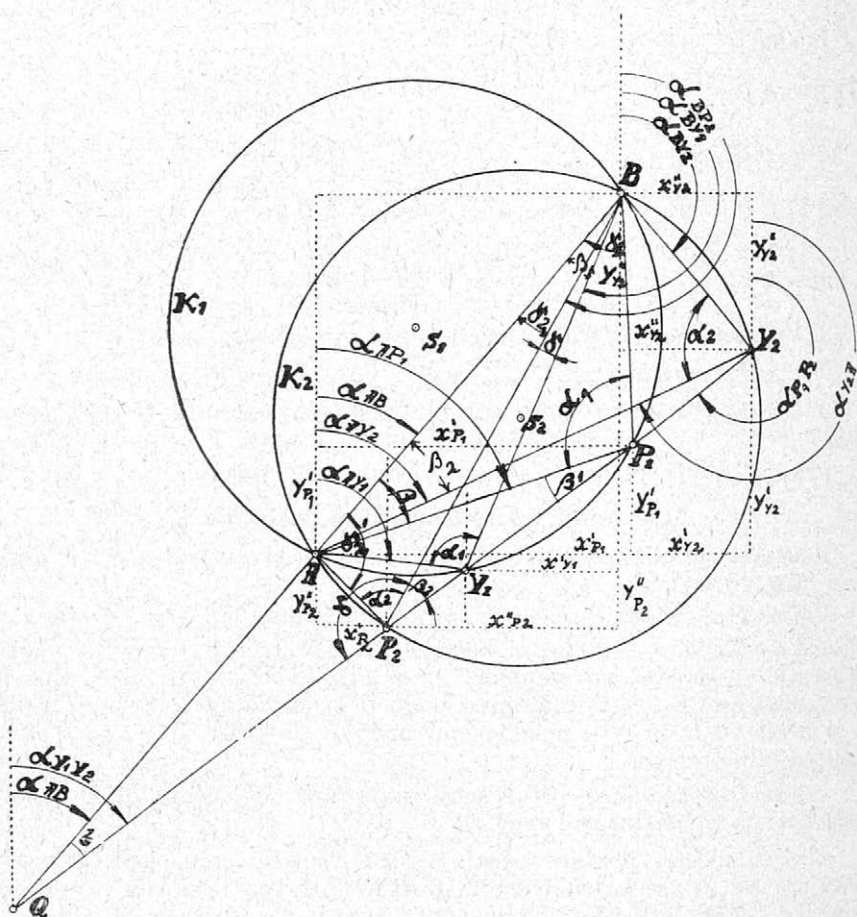
Jako první práci vypočteme ze souřadnic bodů  $A$  a  $B$  směrníky  $\alpha_{AB}$ ,  $\alpha_{BA}$  a stranu  $\overline{AB}$ .

Potom vypočteme souřadnice pomocného bodu  $Y_1$ , které budou:  $X_{Y_1}$ ,  $Y_{Y_1}$ , a souřadnice pomocného bodu  $Y_2$ , které budou:  $X_{Y_2}$ ,  $Y_{Y_2}$ .

Ze souřadnic bodů  $Y_1$  a  $Y_2$  vypočteme směrníky  $\alpha_{Y_1Y_2}$  a  $\alpha_{Y_2Y_1}$ , které jsou zároveň směrníky délek  $P_1P_2$  a  $P_2P_1$ .

Utvoříme rozdíl směrníků  $\alpha_{Y_1Y_2}$  a  $\alpha_{AB}$ , ze získaného úhlu vypočteme pak již přímo ostatní úhly potřebné k řešení souřadnic bodů  $P_1$  a  $P_2$  a tím je potom úloha převedena na úlohu výpočtu souřadnic bodů protínáním postupným (vpřed).

Postup výpočtu u ostatních poloh bodů jest obdobný; menší odchylky jsou jen v určení souřadnic bodů  $Y_1$  a  $Y_2$  podle polohy bodů.



Obr. 4.

K výpočtu je radno udělat si náčrtek, aby se mohly bez chyby stanovit úhly potřebné k výpočtu bodů  $Y_1$  a  $Y_2$ .

Výhoda tohoto způsobu je v tom, že se celý dosti složitý matematický postup, který se liší pro každou polohu bodů, změní po výpočtu souřadnic bodů  $Y_1$  a  $Y_2$  v pouhé dosazování úhlů, takže dostaneme již přímo všechny potřebné hodnoty v trojúhelnících, z nichž pak počítáme již souřadnice bodů  $P_1$  a  $P_2$  jako při protínání vpřed.

Práce začíná stanovením směrnic  $\alpha_{AB}$  a  $\alpha_{BA}$  a výpočtem délky  $\overline{AB}$ .

$$\operatorname{tg} \alpha_{AB} = \frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A}; \overline{AB} = \frac{X_B - X_A}{\sin \alpha_{AB}}; \overline{AB} = \frac{Y_B - Y_A}{\cos \alpha_{AB}}$$

Jak bylo při grafickém řešení tohoto problému ukázáno, leží body  $P_1, P_2, Y_1$  a  $Y_2$  na jedné přímce. Tím je dán určitý vztah mezi body a kružnicemi  $K_1$  a  $K_2$  a máme možnost využít vztahů k řešení souřadnic bodů  $P_1$  a  $P_2$ .

Z vlastnosti stejných vrcholových úhlů nad danou tětivou vidíme, že úhel  $\alpha_1$ , měřený ze stanoviště  $P_1$ , musí být také ve vrcholu  $Y_1$  trojúhelníka  $ABY_1$ , protože oba úhly mají stejnou tětivu  $\overline{AB}$ ; podobně i úhel  $\beta_1$  měřený z téhož stanoviště  $P_1$ , musí se taktéž jevit v této hodnotě i ve vrcholu  $B$  trojúhelníka  $ABY_1$ , protože oba úhly mají na kružnici  $K_1$  stejnou tětivu  $\overline{AY_1}$ . Tím jsou dány v trojúhelníku  $ABY_1$  tyto veličiny:

1. měřené úhly  $\alpha_1, \beta_1$ , třetí úhel jest:  $2R - (\alpha_1 + \beta_1)$ ;

2. strana  $\overline{AB}$  a mohu vypočíst souřadnice bodu  $Y_1$ .

Délky k tomu potřebné  $\overline{AY_1}$  a  $\overline{BY_1}$  vypočtu z trojúhelníka  $ABY_1$  sinovou větou:

$$\overline{AY_1} = \overline{AB} \frac{\sin \beta_1}{\sin \alpha_1}$$

$$\overline{BY_1} = \overline{AB} \cdot \frac{\sin [2R - (\alpha_1 + \beta_1)]}{\sin \alpha_1}$$

nebo užijeme-li již vypočtené délky  $\overline{AY_1}$ ,

$$\overline{BY_1} = \overline{AY_1} \cdot \frac{\sin [2R - (\alpha_1 + \beta_1)]}{\sin \beta_1}$$

Souřadnice bodu  $Y_1$  ze strany  $\overline{AY_1}$  jsou:

$$x'_{Y_1} = \overline{AY_1} \sin \alpha_{Y_1A}, \quad y'_{Y_1} = \overline{AY_1} \cos \alpha_{Y_1A},$$

při čemž  $\alpha_{AY_1} = \alpha_{AB} + [2R - (\alpha_1 + \beta_1)]$  a z toho  $\alpha_{Y_1A} = \alpha_{AY_1} + 2R$ .

Souřadnice bodu  $Y_1$  jsou potom:

$$X'_{Y_1} = X_A + x'_{Y_1}, \quad Y_{Y_1} = Y_A - y'_{Y_1}.$$

Souřadnice bodu  $Y_1$  ze strany  $\overline{BY_1}$ :

$$x''_{Y_1} = \overline{BY_1} \sin \alpha_{BY_1}, \quad y''_{Y_1} = \overline{BY_1} \cos \alpha_{BY_1},$$

při čemž  $\alpha_{BY_1} = \alpha_{BA} - \beta_1$ .

Souřadnice bodu  $Y_1$  ze strany  $\overline{BY_1}$  jsou tedy:

$$X''_{Y_1} = X_B - x''_{Y_1}, \quad Y''_{Y_1} = Y_B - y''_{Y_1}.$$

Souřadnice bodu  $Y_1$  jsou aritmetickým středem obou vypočtených souřadnic:

$$Y_{Y_1} = \frac{Y'_{Y_1} + Y''_{Y_1}}{2}; \quad X_{Y_1} = \frac{X'_{Y_1} + X''_{Y_1}}{2}$$

Podobně vypočteme pak i souřadnice bodu  $Y_2$ .

Z poučky o stejných obvodových úhlech nad danou tětivou vidíme, že se týž úhel, který byl měřen ze stanoviště  $P_2$ , musí jevit také ve vrcholu  $Y_2$  trojúhelníka  $ABY_2$ , to jest úhel  $\alpha_2$ .

Pak v trojúhelníku  $ABY_2$  ve vrchole  $A$  musí být tentýž úhel  $\beta_2$  jako v bodě  $P_2$ , neboť oba úhly jsou úhly obvodové nad stejnou tětivou  $AY_2$ . Tím máme v trojúhelníku  $ABY_2$  dány všechny úhly a stranu  $AB$ , neboť třetí úhel vypočteme jako doplněk daných úhlů  $\alpha_2$  a  $\beta_2$  na  $2R$ , to jest  $2R - [\alpha_2 + \beta_2]$ , a můžeme již počítat souřadnice bodu  $Y_2$ . K tomu potřebujeme znát délky  $AY_2$  a  $BY_2$ .

Tyto vypočteme z trojúhelníka  $ABY_2$  sinovou větou:

$$AY_2 = AB \cdot \frac{\sin [2R - (\alpha_2 + \beta_2)]}{\sin \alpha_2}$$

$$BY_2 = AB \cdot \frac{\sin \beta_2}{\sin \alpha_2}$$

nebo užijeme-li již vypočtené strany  $AY_2$ :

$$BY_2 = AY_2 \cdot \frac{\sin \beta_2}{\sin [2R - (\alpha_2 + \beta_2)]}$$

Souřadnice bodu  $Y_2$  ze strany  $AY_2$  budou:

$$x'_{Y_2} = AY_2 \cdot \sin \alpha_{Y_2A},$$

při čemž  $\alpha_{Y_2A} = \alpha_{AY_1} + 2R$ , a  $\alpha_{AY_1} = \alpha_{AB} + \beta_2$

$$y'_{Y_2} = AY_2 \cdot \cos \alpha_{Y_2A}.$$

Souřadnice bodu  $Y_2$  jsou:

$$X'_{Y_2} = X_A + x'_{Y_2}; \quad Y'_{Y_2} = Y_A + y'_{Y_2}.$$

Souřadnice bodu  $Y_2$  ze strany  $BY_2$ :

$$x''_{Y_2} = BY_2 \cdot \sin \alpha_{Y_2B}, \quad y''_{Y_2} = BY_2 \cdot \cos \alpha_{Y_2B},$$

kde  $\alpha_{Y_2B} = \alpha_{BY_2} + 2R$  a  $\alpha_{BY_2} = \alpha_{BA} - [2R - (\alpha_2 + \beta_2)]$ .

$$X''_{Y_2} = X_B + x''_{Y_2}; \quad Y''_{Y_2} = Y_B - y''_{Y_2}.$$

Souřadnice bodu  $Y_2$  jsou aritmetickým středem obou vypočtených souřadnic:

$$X_{Y_2} = \frac{Y'_{Y_1} + Y''_{Y_1}}{2}; \quad Y_{Y_2} = \frac{X'_{Y_1} + X''_{Y_1}}{2}$$

Tím máme body  $Y_1$  a  $Y_2$  dány souřadnicemi:  $Y_1 (X_{Y_1}, Y_{Y_1})$ ,  $Y_2 (X_{Y_2}, Y_{Y_2})$ .

Z těchto souřadnic vypočteme směrníky strany  $Y_1Y_2$ :

$$\operatorname{tg} \alpha_{Y_1Y_2} = \frac{X_{Y_1} - X_{Y_2}}{Y_{Y_2} - Y_{Y_1}},$$

najdeme skutečnou hodnotu a pak směrníky  $\alpha_{Y_1Y_2}$  a  $\alpha_{Y_2Y_1}$ , které jsou zároveň směrníky strany  $P_1P_2$  a  $P_2P_1$ .

Rozdílem směrníků  $\alpha_{AB}$  a  $\alpha_{Y_1Y_2}$  vypočteme úhel  $b$ .

$$b = \alpha_{Y_1Y_2} - \alpha_{AB}.$$

Tím jsou v trojúhelníku  $Q P_1 B$  dány tři úhly:  $b$  a  $(\alpha_1 + \beta_1)$ , neboť třetí úhel  $\gamma_1 = 2R - [b + (\alpha_1 + \beta_1)]$ , který je zároveň vrcholovým úhlem v  $B$  trojúhelníka  $AP_1B$ .

Tím máme v trojúhelníku  $AP_1B$  dány úhly:  $\gamma_1$ ,  $\alpha_1$  a třetí úhel  $\beta = 2R - (\gamma_1 + \alpha_1)$  a stranu  $AB$  a lze tedy již vypočíst souřadnice bodu  $P$ .

**Formulář**  
**pro zamíření koordinované baterie na HB.**

| Zamíření do HS       |        |                                     |                            |
|----------------------|--------|-------------------------------------|----------------------------|
| Baterie $B_2$ vlevo  |        | Baterie $B_2$ vpravo                | Výpočet $\omega_2$ a $\mu$ |
| $\alpha_1$ ■         | 2365   | $O_1$                               | $D_1$    7136              |
| $-O_1$               | -1262  | $- \alpha_1$ ■                      | $-Z$ ■ -728                |
| $\omega_1$           | 1103   | $\omega_1$                          | $D_1 - Z$ 6408             |
| $\frac{\omega_1}{2}$ | 551.5  | $\frac{\omega_1}{2}$                | $D_1$    7136              |
| $\alpha_2$ ■         | 4115   | $\alpha_2$ ■                        | $+Z$ 728                   |
| $+ \omega_2$         | 2000.9 | $- \omega_2$                        | $D_1 + Z$ 7864             |
| $O_1$                | 6116   | $O_2$                               | $\log(D_1 - Z)$ 3.80672    |
| Pomocné výpočty :    |        | $+ \log \cotg \frac{\omega_1}{2}$   | 10.22085                   |
|                      |        | součet                              | 4.02757                    |
|                      |        | $-\log(D_1 + Z)$                    | 3.98534                    |
|                      |        | $\log \tg \frac{\omega_2 - \mu}{2}$ | 10.13193                   |
|                      |        | $1600 - \frac{\omega_1}{2}$         | 1048.5                     |
|                      |        | $\pm \frac{\omega_2 - \mu}{2}$      | 952.4                      |
|                      |        | $\omega_2$                          | 2000.9                     |
|                      |        | $\mu$                               | 96.1                       |

| Určení dálky HB          |         |                       |         |
|--------------------------|---------|-----------------------|---------|
| Pro $B_2$ vlevo i vpravo |         |                       |         |
| $\log D_1$               | 3.85345 | $\log Z$              | 2.86213 |
| $-\log \sin \omega_1$    | 9.94611 | $-\log \sin \omega_1$ | 9.94611 |
| součet                   | 3.79956 | součet                | 2.80824 |
| $-\log \sin \omega_2$    | 9.96544 | $-\log \sin \mu$      | 8.97408 |
| $\log D_2$               | 3.83412 | $\log D_2$            | 3.83416 |
| $D_2$                    | 6825.3  | $D_2$                 | 6825.9  |

Poznámky: viz příloha 2.

K článku por. děl. Josefa Koprivy: Početní způsob koordinace střelby v dělostřeleckém oddílu.

# Formulář pro střelbu na cíl.

| Střelba na cíl        |        |                       |  |                                       |          |
|-----------------------|--------|-----------------------|--|---------------------------------------|----------|
| Baterie $B_2$ vlevo   |        | Baterie $B_2$ vpravo  |  | Výpočet $\omega'_2$ a $\mu'$          |          |
| $\omega_1$            | 1103   | $\omega_1$            |  | $D'_1$                                | 8236     |
| $-(\pm s_1)$          | -127   | $+(\pm s_1)$          |  | $-Z$ ■                                | 728      |
| $\omega'_1$           | 976    | $\omega'_1$           |  | $D'_1 - Z$                            | 7508     |
| $\frac{\omega'_1}{2}$ | 488    | $\frac{\omega'_1}{2}$ |  | $D'_1$                                | 8236     |
| $\omega'_2$           | 2146.5 | $\omega_2$            |  | $+Z$ ■                                | 728      |
| $-\omega'_2$          | 2000.9 | $-\omega'_2$          |  | $D'_1 + Z$                            | 8964     |
| $s_2$                 | 145.6  | $s_2$                 |  | $\log (D'_1 - Z)$                     | 3.87552  |
| Pomocné výpočty:      |        |                       |  | $+ \log \cotg \frac{\omega'_1}{2}$    | 10.28445 |
|                       |        |                       |  | součet                                | 4.15997  |
|                       |        |                       |  | $-\log (D'_1 - Z)$                    | 3.95250  |
|                       |        |                       |  | $\log \tg \frac{\omega'_2 - \mu'}{2}$ | 10.20747 |
|                       |        |                       |  | $1600 - \frac{\omega'_1}{2}$          | 1112.-   |
|                       |        |                       |  | $\pm \frac{\omega'_2 - \mu'}{2}$      | 1034.5   |
|                       |        |                       |  | $\omega'_2$                           | 2146.5   |
|                       |        |                       |  | $\mu'$                                | 77.5     |

| Určení dálky HB                  |         |                         |         |
|----------------------------------|---------|-------------------------|---------|
| Pro baterii $B_2$ vlevo i vpravo |         |                         |         |
| $\log D'_1$                      | 3.91572 | $\log Z$                | 2.86213 |
| $+ \log \sin \omega'_1$          | 9.91283 | $+ \log \sin \omega'_1$ | 9.91283 |
| součet                           | 3.82855 | součet                  | 2.77496 |
| $-\log \sin \omega'_2$           | 9.93424 | $-\log \sin \mu'$       | 8.85088 |
| $\log D'_2$                      | 3.89431 | $\log D'_2$             | 3.89408 |
| $D'_2$                           | 7839.8  | $D'_2$                  | 7835.8  |

| Libela cíle C                   |          |                                                                                                                                                      |  |
|---------------------------------|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| $D'_1$                          | 8.236 km | Pomocné výpočty:<br>$D'_1 \cdot \tau'_1 = 8.236 \times 26 = 214.136$<br>$(D'_1 \cdot \tau'_1 - \Delta v) : D_2 =$<br>$152 : 7.84 = 19.4 \text{ dc.}$ |  |
| $\tau'_1$                       | + 26 dc  |                                                                                                                                                      |  |
| $D'_1 \cdot \tau'_1$            | 214 m    |                                                                                                                                                      |  |
| $-(\pm \Delta v)$ ■             | - 62 m   |                                                                                                                                                      |  |
| $D'_1 \cdot \tau'_1 - \Delta v$ | 152 m    |                                                                                                                                                      |  |
| $D_2$                           | 7.840 km |                                                                                                                                                      |  |
| $\tau_2$                        | 19.4 dc  |                                                                                                                                                      |  |
| Libela                          | 219      |                                                                                                                                                      |  |

Poznámky: 1. Hodnoty označené po straně jednou čarou znamenají hodnoty konstantní pro všechny střelby z týchž palebných postavení.

2. Hodnoty označené po straně dvěma čarami znamenají hodnoty, které zastřelí řídicí baterie.

3. Hodnoty označené čtvercem znamenají hodnoty, které udá orientační důstojník.

V trojúhelníku  $Q P_2 B$  máme dány dva úhly  $b$  a  $\gamma$  a stranu  $\overline{AB}$ , při čemž  $\gamma = 2R - \beta_2$ , jak je zřejmé z obrazu 4, a můžeme tedy vypočítat zbývající třetí úhel  $\gamma_2$ .

$$\gamma_2 = 2R - (b + \gamma).$$

Tím tedy máme v trojúhelníku  $A P_2 B$  dány úhly:  $\alpha_2$ ,  $\gamma_2$ , třetí úhel je:  $\gamma'_2 = 2R - (\alpha_2 + \gamma_2)$ , a stranu  $\overline{AB}$  a můžeme již tedy vypočítat souřadnice bodu  $P_2$ .

K výpočtu souřadnic bodu  $P_1$  musíme znáti délky  $\overline{AP_1}$  a  $\overline{BP_1}$  a potřebné směrníky  $\alpha_{AP_1}$  a  $\alpha_{BP_1}$ .

Tyto vypočteme z trojúhelníka  $ABP_1$  sinovou větou ze známé strany  $\overline{AB}$ .

$$\begin{aligned}\overline{AP_1} : \overline{AB} &= \sin \gamma_1 : \sin \alpha_1, & \overline{AP_1} &= \overline{AB} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \alpha_1} \\ \overline{BP_1} : \overline{AB} &= \sin \gamma'_1 : \sin \alpha_1, & \overline{BP_1} &= \overline{AB} \cdot \frac{\sin \gamma'_1}{\sin \alpha_1} \\ \overline{AP_1} : \overline{BP_1} &= \sin \gamma_1 : \sin \gamma'_1, & \overline{BP_1} &= \overline{AP_1} \cdot \frac{\sin \gamma'_1}{\sin \gamma_1}.\end{aligned}$$

Souřadnice bodu  $P_1$  budou potom ze strany  $\overline{AP_1}$ :

$$\begin{aligned}x'_{P_1} &= \overline{AP_1} \cdot \sin \alpha_{PA_1}, & y'_{P_1} &= \overline{AP_1} \cdot \cos \alpha_{PA_1}, \\ X'_{P_1} &= X_A + x'_{P_1} & Y'_{P_1} &= Y_A + y'_{P_1};\end{aligned}$$

ze strany  $\overline{BP_1}$  pak:

$$\begin{aligned}x''_{P_1} &= \overline{BP_1} \cdot \sin \alpha_{PB_1} & y''_{P_1} &= \overline{BP_1} \cdot \cos \alpha_{PB_1} \\ X''_{P_1} &= X_B + x''_{P_1}; & Y''_{P_1} &= Y_B - y''_{P_1}.\end{aligned}$$

Souřadnice bodu jsou pak aritmetickým středem obou souřadnic:

$$X_{P_1} = \frac{X'_{P_1} + X''_{P_1}}{2}; \quad Y_{P_1} = \frac{Y'_{P_1} + Y''_{P_1}}{2}.$$

Souřadnice bodu  $P_2$  vypočteme obdobně z trojúhelníka  $ABP_2$ .

Vypočteme obě strany  $AP_2$  a  $BP_2$  z tohoto trojúhelníka sinovou větou:

$$\overline{AP_2} = \overline{AB} \frac{\sin \gamma_2}{\sin \alpha_2} \quad \overline{BP_2} = \overline{AB} \frac{\sin \gamma_1}{\sin \alpha_2}.$$

Souřadnice bodu  $P_2$  ze strany  $\overline{AP_2}$  budou:

$$\begin{aligned}x'_{P_2} &= \overline{AP_2} \cdot \sin (\alpha_{AB} + \gamma_1), & y'_{P_2} &= \overline{AP_2} \cdot \cos (\alpha_{AB} + \gamma_1) \text{ (zřejmé z obr. 4).} \\ X'_{P_2} &= X_A + x'_{P_2} & Y'_{P_2} &= Y_A - y'_{P_2}.\end{aligned}$$

Souřadnice bodu  $P_2$  ze strany  $\overline{BP_2}$  budou:

$$\begin{aligned}x''_{P_2} &= \overline{BP_2} \cdot \sin \alpha_{PB_2}; & y''_{P_2} &= \overline{BP_2} \cdot \cos \alpha_{PB_2}. \\ X''_{P_2} &= X_B - x''_{P_2}; & Y''_{P_2} &= Y_B - y''_{P_2}.\end{aligned}$$

Souřadnice bodu  $P_2$  jsou opět aritmetickým středem obou souřadnic:

$$X_{P_2} = \frac{X'_{P_2} + X''_{P_2}}{2}; \quad Y_{P_2} = \frac{Y'_{P_2} + Y''_{P_2}}{2}.$$

Ostatní polohy.

Řešení souřadnic bodu  $P_1$  a  $P_2$  při ostatních polohách jest obdobné jako při poloze I, liší se jen výpočet bodů Y.

Body Y se vypočtou podle pravidel pro grafické řešení Hansenova problému.

Poručík děl. Bohumil Peš an:

## Dělostřelecké logaritmické počítadlo.

V Dělostřeleckých rozhledech 1935, čís. 7/8 a 9 popisuje kpt. děl. Chyška telemetrickou metodu zastřílení vysokými rozprasky s topografickým podkladem a bez něho. V obou případech souvisí řešení s řadou početních úkonů, které kpt. děl. Chyška navrhuje provádět takto:

Je-li k dispozici topografický podklad, nutno výpočet provádět nejvhodněji nějakým mechanickým počítadlem (logaritmickým pravítkem); není-li topografického podkladu, uvažuje o početním řešení pomocí cosinového a sinového abaku.

Jak má být toto počítadlo realizováno, o tom se autor nezmiňuje, a proto v souvislosti s obsahem celé práce jsem se pokusil zkonstruovat podle francouzského vzoru dělostřelecké logaritmické počítadlo, které se k těmto účelům velmi dobře hodí; lze jím nejen výhodně nahradit oba uvedené nomogramy (cosinový a sinový), ale i provádět všechny úkony, které souvisí s přípravou a prováděním dělostřelecké střelby. Zatím sestrojil kpt. Kuba jednoduché kruhové počítadlo, jež má dvě výhody: je jednoduché a levné. Zato má jednu nevýhodu: pro některé úkony, na př. pro střelbu vysokými rozprasky, je méně přesné, což vyplývá z jeho rozměrů. Proto navrhuji počítadlo spirální, jež je mnohem přesnější. Počítal jsem jím mnoho příkladů a všechny úkony, jež se vyskytují při střelbě vysokými rozprasky, jsem jím při pokusných střelbách prováděl s velkým úspěchem. Přesnost, kterou toto počítadlo dává, je více než dostačující pro daný účel.

### I. Popis.

Pro snadnější pochopení při zacházení s počítadlem uvádím zhruba jeho konstrukci.

Počítadlo (obr. 1) se skládá:

1. z aluminiové desky  $20,5 \times 22$  cm,
2. ze dvou celuloidových kotoučů a
3. z upevňovacího šroubu s podložkou.

Aluminiová deska nese na svém okraji dvě svorky. Svorky jsou k tomu, abychom mohli buď vrchní nebo spodní kotouč zastavit a upevnit v žádané poloze. Ve středu aluminiové desky je čep, na který se nasunují otáčivé oba kotouče. Na spodním okraji aluminiové desky jsou přišroubovány deštičky se vzorci pro snadnější zacházení s počítadlem. Ve středu horního okraje desky je šroubky připevněn celuloidový pásek, který má na své spodní ploše černý vryp. Druhý konec pásku je kruhový a nasune se taktéž na čep. Čep je v své horní části opatřen závitem k našroubování upevňovacího šroubu.