

*Problém výstřelu s planety na planetu.***Problém balistický.**

(Dokončení.)

Mezi úsečkami x_1, x_2 ; $(D - x_1), (D - x_2)$ jsou tedy poměry

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{R_1 [R_1 \mu_2 + (D - R_1) \mu_1]}{D \cdot (D - R_1) \mu_1}; \quad \frac{D - x_2}{D - x_1} = \frac{D \cdot R_1 \cdot \mu_2}{(D - R_1) \cdot [R_1 \mu_2 + (D - R_1) \mu_1]}$$

Nazveme-li (jako dosud jsme nazývali) koncové body úseček x_1, x_2 písmenami N', N'' , pak pro čtveřinu bodů S_1, S_2, N', N'' platí dvoj-poměr

$$\frac{x_1}{x_2} : \frac{D - x_1}{D - x_2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \left[\frac{R_1}{D - R_1} \right]^2$$

Bod N'' dělí úsečku $S_1 S_2$ v poměru $\frac{x_2}{D - x_2} = \frac{\mu_1 \cdot (D - R_1)}{\mu_2 \cdot R_1}$. . . (71)

Poněvadž pak jest $x_1 = R_1, D - x_1 = D - R_1$, tedy platí

$$\frac{x_2}{D - x_2} : \frac{D - x_1}{x_1} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (72)$$

O bodech na dráze střely (jež se pohybuje po úsečce $U_1 U_2$), v nichž má daná střela stejnou energii kinetickou. Tažme se na úsečku x onoho bodu na dráze dané střely, v němž tato střela bude mít stejnou kinetickou energii, jakou měla na počátku svého pohybu v bodě U_1 . Musí tedy býti v onom bodě $v = V_0$. V tomto případě se rovnice 49 redukuje na tvar

$$\frac{\mu_2}{D - x} + \frac{\mu_1}{x} = \frac{\mu_2}{D - R_1} + \frac{\mu_1}{R_1} = \frac{R_1 (\mu_2 - \mu_1) + D \mu_1}{R_1 (D - R_1)} = \frac{1}{2} V_0^2$$

Srovnáme-li tuto rovnici s rovnicí 50, vidíme, že se od ní liší jen členem $-\frac{V_0^2}{2}$ na pravé straně rovnice 50. Avšak člen tento vymizí,

je-li $V_0 = 0$, kterýž případ byl právě řešen. Jest tedy patrné, že výsledky případu předešlého platí též pro bod, v němž kinetická energie střely jest rovna kinetické energii počátečné.

Dosud jsme brali (v tomto a v předešlém případě) $x_1 = R_1$, takže bod N' byl totožný s bodem U_1 . Případ tento však můžeme zevšeobecněti. Integraci rovnice 48' nemusíme prováděti od meze $x = R_1$. Postupujeme takto: Tážeme se, které integrační meze x_1, x_2 musíme zavésti v integrálu rovnice 47, aby integrál tento se rovnal nule, t. j. aby bylo

$$\int_{x_1}^{x_2} (g_1 - g_2) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mu_1}{x^2} dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mu^2}{(D-x)^2} dx = 0 \quad \dots \quad (73)$$

Integraci obdržíme odtud

$$\mu_1 \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right) + \mu_2 \left(\frac{1}{D-x_1} - \frac{1}{D-x_2} \right) = 0,$$

čili

$$\frac{\mu_1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{\mu_2}{(D-x_1) \cdot (D-x_2)},$$

což můžeme psáti ve tvaru

$$\frac{x_2}{D-x_2} : \frac{D-x_1}{x_1} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad \dots \quad (72)$$

což jest rovnice dříve již odvozená pro případ $V_0 = 0, v = 0$, kdy

jest $x_1 = R_1, x_2 = D \frac{\mu_1(D-R_1)}{\mu_1(D-R_1) + \mu_2 R_1}$. Vztah tento platí tedy obec-

něji. Povšimneme-li si rovnice 73, seznáme, že značí práci jednotky hmotné na dráze $(x_2 - x_1)$. Práce tato pak má nulovou hodnotu. Podle zákona o zachování energie, tedy střele, jež proběhla dráhu $x_2 - x_1$ nepřibýlo ani neubýlo kinetické energie. Označíme-li zase N', N'' body na konci úseček x_1, x_2 , pak má střela v obou těchto bodech stejnou kinetickou energii, tedy též stejnou rychlost v . Dospěli jsme tedy k výsledku:

Ke každému bodu N' na úsečce $\overline{U_1 U_2}$ přísluší jiný bod N'' , jenž spolu s bodem N' a gravitačními centry S_1, S_2 tvoří čtveřinu bodů, pro kterou platí dvojpoměr 72. Střela letící po úsečce $\overline{U_1 U_2}$ má v obou bodech N', N'' stejnou rychlost v .

Jaká jest souřadnice x onoho bodu $N' = N''$, jenž odpovídá zde sám sobě? Obdržíme ji z dvojpoměru 72, dosadíme-li v něm za $x_1 = x_2 = x$. Dostaneme pak rovnici

$$\frac{\mu_1}{x_2} = \frac{\mu_2}{(D-x)^2}, \quad \dots \quad (38)$$

jejíž kořeny jsou X_1, X_2 , dané vzorcí 39', 40'. Kořeny X_1, X_2 přísluší bodům N_1, N_2 , v nichž za předpokladu platnosti rovnice $g = g_1 - g_2$ jest $g = 0$, jak jsme byli dříve odvodili. Poněvadž bod N_2 neleží na úsečce $\overline{U_1 U_2}$, pro níž jedině platí rovnice $g = g_1 - g_2$, má pro řešení problému význam jen bod N_1 . V bodě N' jest $g > 0$, v bodě N_1 jest $g = 0$, v bodě N'' jest $g < 0$. Body N', N'' leží po obou stranách bodu N_1 .

Na dráze $\overrightarrow{N' N_1}$ střela koná práci, poněvadž se pohybuje proti směru výsledné gravitační síly $g.m$, jež na ni působí. Potřebnou

energii pro výkon této práce čerpá střela ze zásoby své energie kinetické. Velikost této práce jest

$$L' = m \cdot \int_{x_1}^{X_1} (g_1 - g_2) dx = m \left[\int_{x_1}^{X_1} \frac{\mu_1}{x^2} dx - \int_{x_1}^{X_1} \frac{\mu_2}{(D-x)^2} dx \right],$$

čili

$$L' = m \left[\mu_2 \left(\frac{1}{D-X_1} - \frac{1}{D-x_1} \right) + \mu_1 \left(\frac{1}{X_1} - \frac{1}{x_1} \right) \right].$$

Dosadíme-li do tohoto vzorce za X_1 , $D-X_1$ výrazy 39', 41, obdržíme po úpravě

$$L' = -m \frac{[(D-x_1) \sqrt{\mu_1 - x_1 \sqrt{\mu_2}}]^2}{D \cdot x_1 (D-x_1)} \quad \dots \quad (74)$$

Znaménko „—“ nasvědčuje tomu, že při tomto pohybu byla energie spotřebována.

Na další dráze $\overrightarrow{N_1 N''}$ působí na střelu výsledné gravitační při rychlení g ve směru jejího pohybu, tudíž kinetické energie střely bude přibývat a přibude jí na dráze $\overrightarrow{N_1 N''}$ o

$$L'' = m \int_{x_1}^{x_2} (g_1 - g_2) dx = m \cdot \left[\int_{x_1}^{x_2} \frac{\mu_1}{x^2} dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mu_2}{(D-x)_2} dx \right]$$

čili

$$L'' = m \cdot \left[\mu_2 \left(\frac{1}{D-x_2} - \frac{1}{D-x_1} \right) + \mu_1 \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) \right] \quad \dots \quad (75)$$

Dosadíme-li sem zase za x_2 z rovnice 72

$$x_2 = \frac{\mu_1 \cdot D (D-x_1)}{\mu_1 (D-x_1) + \mu_2 x_1} \quad \dots \quad (72')$$

a za X_1 z rovnice 39', obdržíme po úpravě

$$L'' = m \cdot \left[\frac{(D-x_1) \mu_1 - x_1 \sqrt{\mu_1 \mu_2}}{D x_1} + \frac{x_1 \mu_2 - (D-x_1) \sqrt{\mu_1 \mu_2}}{D (D-x_1)} \right]$$

čili

$$L'' = m \cdot \frac{[(D-x_1) \sqrt{\mu_1 - x_1 \sqrt{\mu_2}}]^2}{D x_1 (D-x_1)} = -L'$$

Energie kinetická, jež střele přibude na dráze $\overrightarrow{N_1 N''} = (x_2 - X_1)$ jest rovna kinetické energii, kterou střela spotřebuje na dráze $\overrightarrow{N' N_1} = (X_1 - x_1)$.

Avšak energie L' , kterou střela spotřebovává na dráze $\overrightarrow{N' N_1}$ musí býti z něčeho čerpána. Předpokládáme, že jediným fondem, z něhož může býti čerpána, jest kinetická energie, kterou uvažovaná střela ještě měla, když proletovala bodem N' , t. j. energie $\frac{m}{2} \cdot v^2$.

Je-li $\frac{m}{2} \cdot v^2 > -L'$, je střela vybavena dostatečným fondem kinetické energie, aby dospěla až do bodu nulového přirychlení N_1 , v němž jí pak ještě zbude kinetická energie

$$\frac{m v^2}{2} + L' = \frac{m}{2} \cdot v_m^2.$$

V bodě N_1 bude rychlost střely minimální v_m a její velikost jest

$$v_m = \sqrt{v^2 + \frac{2}{m} \cdot L'} \quad \dots \quad (76)$$

Položíme-li bod N' až do ústí děla U_1 , pak jest $v = V_0$, $x_1 = R_1$. Dosadíme-li do vzorce 74 za $x_1 = R_1$ a pak odtud za L' do rovnice 76, obdržíme vzorec pro minimální rychlost v_m

$$v_m = \sqrt{V_0^2 - \frac{2[(D-R_1) \sqrt{v_1 - R_1} \sqrt{v_2}]^2}{D \cdot R_1 (D-R_1)}} \dots \dots \dots (77)$$

Ze vzorce 77 je patrné, že minimální rychlost v_m je reálná jen tehdy, měla-li střela počátečnou rychlost

$$V_0 \geq \sqrt{2 \frac{[(D-R_1) \sqrt{v_1 - R_1} \sqrt{v_2}]^2}{D \cdot R_1 (D-R_1)}}$$

Platí-li v tomto vztahu znaménko rovnosti, pak jest $v_m = 0$

$$V_{0,1} = \sqrt{2 \frac{[(D-R_1) \sqrt{v_1 - R_1} \sqrt{v_2}]^2}{D \cdot R_1 (D-R_1)}} \dots \dots \dots (57)$$

značí tedy nejmenší počátečnou rychlost, nutnou aby střela na své dráze dospěla až do bodu N_1 , v němž se vyvažují účinky gravitačních sil, jimiž obě tělesa I, II na střelu působí. Má-li střela tuto počátečnou rychlost $V_{0,1}$, dospěje do bodu N_1 s rychlostí $v_m = 0$, utkví v něm v rovnováze labilní. Měla-li počátečnou rychlost i jen o málo menší, nedospěje až do bodu N_1 a bude hvězdou I zase přitahována zpět. Je-li její počátečná rychlost i jen o málo větší než $V_{0,1}$, proletí uvažovaná střela bodem N_1 s rychlostí $v_m > 0$ a bude pak přitahována hvězdou II.

Vzorec 57' jest identický se vzorcem 57, který jsme byli již dříve odvodili jiným způsobem. Identita obou vzorců je nejlépe patrna ze vzorce 55', z něhož byl vzorec 57 odvozen.*)

Vypočteme vzorec pro minimální rychlost dopadu, s níž by střela, vržená s hvězdy I, dopadla na hvězdu II.

Hledaná minimální rychlost dopadu odpovídá minimální počátečné rychlosti $V_{0,1}$ (viz 57'). Dosadíme-li tedy do vzorce 49 za $V_0 = V_{0,1}$ ze vzorce 57' a za $x = D - R_2$, obdržíme

$$v = \sqrt{2 \cdot \left[\frac{[(D-R_1) \sqrt{v_1 - R_1} \sqrt{v_2}]^2}{D \cdot R_1 \cdot (D-R_1)} + v_2 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{D-R_1} \right) + v_1 \left(\frac{1}{D-R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \right]}$$

Můžeme však odvoditi jednodušší vzorec pro minimální rychlost dopadu v na hvězdu II. Dospějeme k němu touto úvahou:

Střela vržená z bodu $U_1 = N'$ počátečnou rychlostí $V_{0,1}$ (57') spotřebuje všecku zásobu své počátečné kinetické energie $\frac{m \cdot V_{0,1}^2}{2} = -L'$, kterou při výstřelu obdržela, právě na práci, již vykoná výstupem na dráze $N'N_1$, neboť dospěje do bodu N_1 s rychlostí (skoro) nulovou. Na další její dráze $N_1 \rightarrow U_2$ vzrůstá kinetická energie střely od nuly až k hodnotě $\frac{m v^2}{2}$, se kterouž energií dopadne střela na povrch hvězdy II, t. j. do vzdálenosti R_2 od gravitačního centra S_2 této hvězdy. Velikost této kinetické energie vypočteme podobně jako jsme byli vypočetli přírůstek kinetické energie L'' (str. 84), jen s tím rozdílem, že za integrační mez x_2 položíme $D - R_2$.

*) Minimální rychlosti v_m jsou počítány (v) v příkladech 10, 11, 12, 13, 14, 15.

Pak dostaneme z rovnice 75

$$\frac{m v^2}{2} = m \cdot \left[\mu_2 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{D - X_1} \right) + \mu_1 \left(\frac{1}{D - R_2} - \frac{1}{X_1} \right) \right]$$

a dosadíme-li sem za X_1 , $D - X_1$ ze vzorců 39', 41, obdržíme

$$\frac{v^2}{2} = \frac{\mu_1}{D - R_2} + \frac{\mu_2}{R_2} - \left[\frac{\mu_1 + \sqrt{\mu_1 \mu_2}}{D} + \frac{\sqrt{\mu_1 \mu_2} + \mu_2}{D} \right]$$

tedy

$$v = \sqrt{2 \cdot \left[\frac{\mu_1 R_2 + \mu_2 (D - R_2)}{R_2 (D - R_2)} - \frac{(\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2})^2}{D} \right]} \quad (78)$$

Srovnáme tento vzorec 78 se vzorcem 55, dávajícím meznou počáteční rychlost $V_{0,1}$, při níž na dráze střely ještě existuje reálný bod, v němž má střela nulovou rychlost. Píšeme-li ve výrazu 55 místo označení V_0 , R_1 , μ_1 , μ_2 korespondující označení v , R_2 , μ_2 , μ_1 , obdržíme z něho rovnici platnou pro meznou rychlost $v = V_{0,1}$ střely

vržené s tělesa II směrem $\vec{U}_2 \vec{U}_1$, kdy na dráze této střely ještě existuje reálný bod, v němž uvažovaná střela má rychlost nulovou. Rovnice, kterou takto dostaneme, bude pak identickou s právě odvozeným výrazem 78 pro minimální rychlost dopadu střely vržené s hvězdy I na hvězdu II.

To plyne též z jednoduché úvahy, že střele, jež padá z bodu N_1 na hvězdu II (nebo I), při tomto pohybu přibude právě tolik kinetické energie, kolik by jí ona střela spotřebovala, aby vystoupila s povrchu hvězdy II (nebo I) až do bodu N_1 .

Vzorec 49 můžeme psát ve tvaru

$$v^2 = V_0^2 - 2 \cdot \left[\frac{\mu_1}{R_1} + \frac{\mu_2}{D - R_1} \right] + 2 \cdot \left[\frac{\mu_1}{x} + \frac{\mu_2}{D - x} \right].$$

V tomto výrazu zavedme pro funkci $\frac{\mu_1}{x} + \frac{\mu_2}{D - x}$ označení

$$\frac{\mu_1}{x} + \frac{\mu_2}{D - x} = \varphi(x).$$

Pak jest

$$\frac{\mu_1}{R_1} + \frac{\mu_2}{D - R_1} = \varphi(R_1); \quad V_0^2 - 2 \cdot \varphi(R_1) = -2\gamma,$$

tedy

$$v^2 = 2[\varphi(x) - \gamma].$$

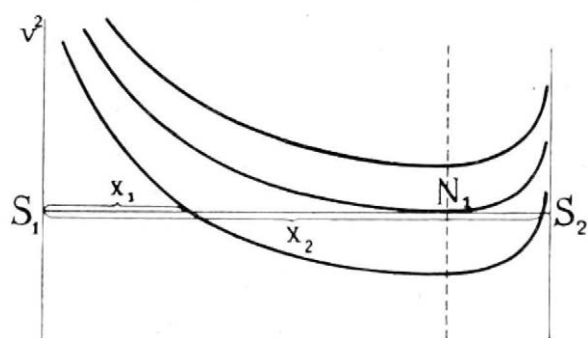
Derivováním obdržíme

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = -\frac{\mu_1}{x^2} + \frac{\mu_2}{(D - x)^2} = g.$$

Další derivace $\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = \frac{dg}{dx}$, $\frac{d^2g}{dx^2}$, jakož i průběh výsled-

ného gravitačního přirychlení g jsme již uvažovali na str. 625—626*) tohoto pojednání. Na základě těchto úvah můžeme si nyní graficky znázorniti závislost čtverce rychlosti v^2 na počáteční rychlosti V_0 a na okamžité vzdálenosti x uvažované střely od gravitačního centra S_1 hvězdy I. Takové grafické znázornění ukazuje obr. 7.

*) Vojenské Rozhledy, roč. III. 1922.



Obr. 7.

Jeho jednotlivé křivky jsou vůči sobě posunuty o délku $\gamma_i - \gamma_k$ ve směru osy v^2 , jež jest kolmá na ose X , jdoucí centry S_1, S_2 .

Příklad 24.: Minimální počáteční rychlosti $V_{0,1} = 11.075$ km/sek střely vržené se země po přímce

$\overrightarrow{U_1 U_2}$, odpovídá minimální rychlost dopadu $v = 2.2967$ km/sek uvažované střely na měsíc.

Naopak minimální po-

čáteční rychlosti $V_0 = 2.2967$ km/sek střely, jež byla vržena s měsíce po přímce $\overrightarrow{U_2 U_1}$, odpovídá minimální rychlost dopadu této střely na zemkouli $v = 11.075$ km/sek.

Výpočet doby letu střely.

Ze vzorce 49 plyne

$$v = \pm \sqrt{V_0^2 - 2 \left[\frac{\mu_2}{D - R_1} + \frac{\mu_1}{R_1} \right] + 2 \cdot \left[\frac{\mu_1}{x} + \frac{\mu_2}{D - x} \right]}.$$

Známe-li veličiny μ_1, μ_2, R_1, D daného systému dvou hvězd I, II a je-li dána též počáteční rychlost V_0 střely vržené s povrchu (R_1) hvězdy I v přímce $\overrightarrow{U_1 U_2}$, pak známe výraz

$$V_0^2 - 2 \cdot \left[\frac{\mu_1}{R_1} + \frac{\mu_2}{D - R_1} \right] = -2\gamma,$$

jež jsme zde označili -2γ ve shodě s výrazem 51.

V daném případě, který právě uvažujeme, jest tedy γ konstantou příslušnou dané počáteční rychlosti V_0 a danému systému dvou hvězd I, II, když dráha střely leží na přímce $S_1 S_2$.

Okamžitá rychlost střely $v = \frac{dx}{dt}$ co derivace dráhy $x - R_1$ podle času t jest pak dána vztahem

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{-2\gamma + 2 \left[\frac{\mu_1}{x} + \frac{\mu_2}{D - x} \right]},$$

z něhož ihned plyne

$$dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{2 \left[\frac{\mu_1 (D - x)}{x (D - x)} + \frac{\mu_2 x}{x (D - x)} - \gamma \right]}}$$

čili

$$dt = \pm \sqrt{\frac{x (D - x)}{2 [\mu_2 x + \mu_1 (D - x) - \gamma \cdot x \cdot (D - x)]}} \cdot dx$$

nebo konečně

$$dt = \pm \int \frac{x(D-x)}{2[x^2\gamma + x(\mu_2 - \mu_1 - \gamma D) + \mu_1 D]} \cdot dx \quad (79)$$

Pod odmocninou ve jmenovateli tohoto vzorce jest zde výraz, jenž je kvadratický v proměnné x a je shodný s levou stranou rovnice 50". Kořeny této rovnice jsme označovali x_1, x_2 .

Jest tedy

$$x^2\gamma + x(\mu_2 - \mu_1 - \gamma D) + \mu_1 D = \gamma \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2),$$

takže diferenciál 79 můžeme psát ve tvaru

$$dt = \pm \int \frac{x \cdot (D - x)}{2\gamma \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)} \cdot dx$$

Integrací této diferenciální rovnice dostaneme dobu letu střely. Položme počátek času $t=0$ do okamžiku, kdy uvažovaná střela opouští ústí děla U_1 na povrchu hvězdy I (kdy jest $x = R_1$). Hledáme čas t , jenž uplyne od tohoto okamžiku $t=0$ až po okamžik, v němž je uvažovaná střela ve vzdálenosti x od gravitačního centra hvězdy I.

Integrací v těchto mezích tedy obdržíme

$$t = \pm \int_{R_1}^x \frac{x \cdot (D - x)}{2\gamma \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)} \cdot dx \quad (80)$$

Diskussi kořenů x_1, x_2 jsme v tomto pojednání již byli provedli. Dovedli jsme, že kořeny x_1, x_2 jsou reálné různé, je-li počátečná rychlost střely buď

$$V_0 < V_{0,1} = \sqrt{\frac{2}{D} \cdot \left[\sqrt{\frac{\mu_1(D - R_1)}{R_1}} - \sqrt{\frac{\mu_2 \cdot R_1}{D - R_1}} \right]}$$

nebo

$$V_0 > V_{0,2} = \sqrt{\frac{2}{D} \cdot \left[\sqrt{\frac{\mu_1(D - R_1)}{R_1}} + \sqrt{\frac{\mu_2 \cdot R_1}{D - R_1}} \right]}.$$

Je-li počátečná rychlost V_0 v mezích rychlostního intervalu

$$V_{0,1} < V_0 < V_{0,2},$$

pak kořeny x_1, x_2 jsou komplexně sdružené.

Konečně ve dvou vyjimečných případech, když jest buď $V_0 = V_{0,1}$, nebo $V_0 = V_{0,2}$, jsou oba kořeny reálné a stejné, $x_1 = x_2$.

Integrál 80 jest řešitelný v uzavřené formě jen ve vyjimečných případech. Pomineme-li případ $D=0$, jenž nemá významu, pak jsou řešitelné tyto případy:

a) $x_1 = x_2$, t. j. když $V_0 = V_{0,1}$, nebo $V_0 = V_{0,2}$. Tehdy obdržíme

$$t = \pm \int_{R_1}^x \frac{\sqrt{x \cdot (D - x)}}{(x - x_1) \cdot \sqrt{2\gamma}} \cdot dx, \quad (81)$$

kterýž integrál dovedeme rozřešiti. Jeho řešení bude dále podáno.

b) *Je-li buď $x_1 = D$, nebo $x_2 = D$.* Poněvadž oba tyto případy mají pro řešení integrálu 80 týž obecný význam, zabývejme se jen jedním z nich, na př. případem $x_1 = D$. Tu dostaneme integrál

$$t = \pm \int_{R_1}^x \frac{\sqrt{-x}}{2\gamma(x - x_2)} \cdot dx, \quad (82)$$

jež rovněž umíme rozřešiti. I tohoto případu si dále povšimneme. V případě obecném, kdy kořeny x_1, x_2 jsou různé, ať reálné, nebo komplexně sdružené, nedovedeme rozřešiti integrálu 80.

V tomto obecném případě můžeme uvažovaný integrál 80 substitucí

$$\frac{x}{x - x_1} = z \dots \dots \dots (83)$$

převést na tvar zdánlivě jednodušší, v němž ve jmenovateli pod odmocninou jest jen lineární funkce argumentu z .

Dosadíme-li totiž do výrazu 80 ze substituce 83 za

$$x = x_1 \cdot \frac{z}{z - 1}; \quad dx = -x_1 \cdot \frac{dz}{(z - 1)^2},$$

obdržíme po úpravě

$$dt = \pm \int_{z_1}^z \frac{x_1}{|2\gamma(z-1)^2|} \cdot \frac{\sqrt{z[D(D-x_1)-D]}}{z \cdot (x_1 - x_2) + x_2} \cdot dz$$

Avšak ani tohoto integrálu nedovedeme rozřešiti.*)

Omezíme se proto jen na studium případů, jež byly výše vytčeny sub a) a b).

Ad. a): Jest vyřešiti integrál

$$t = \pm \int_{R_1}^x \frac{\sqrt{x \cdot (D - x)}}{(x - x_1) \cdot |2\gamma|} \cdot dx \dots \dots \dots (81)$$

Substitucí

$$\frac{x}{D - x} = z^2, \dots \dots \dots (84)$$

podle níž jest

$$x = D \cdot \frac{z^2}{1 + z^2}, \quad dx = 2D \cdot \frac{z \, dz}{(1 + z^2)^2},$$

převědeme tento integrál ihned na integrál z funkce racionálné. Dostaneme totiž

$$t = \pm \frac{2D^2}{|2\gamma|} \cdot \int_{z_1}^z \frac{z^2}{(1 + z^2)^2 \cdot [z^2(D - x_1) - x_1]} \cdot dz \dots \dots \dots (85)$$

Avšak v tomto případě jest buď $x_1 = x_2 = X_1$, nebo $x_1 = x_2 = X_2$, kdež vzdálenosti X_1, X_2 jsou dány vzorci 39', 40', jak jsme již dříve byli dokázali. *Případ a), který právě uvažujeme, rozštěpuje se nám tedy na dva případy:*

α) *Buď jest* $x_1 = x_2 = X_1$, t. j. $V_0 = V_{0,1}$.

β) *Nebo jest* $x_1 = x_2 = X_2$, t. j. $V_0 = V_{0,2}$.

Vyřešme postupně oba tyto případy.

Ad. α): Položíme $x_1 = X_1$. Integrál 85 pak nabývá tvaru

$$t = \pm \frac{2D^2}{|2\gamma|} \cdot \int_{z_1}^z \frac{z^2}{(1 + z^2)^2 \cdot [z^2(D - X_1) - X_1]} \cdot dz \dots \dots \dots (85')$$

*) Mé znalosti se zde omezují na obsah díla prof. Petra: Počet integrální, 1915, v němž není zmínky o řešení integrálů z iracionálné funkce tohoto druhu.

Tu jest $D - X_1 > 0$. Označme

$$\sqrt{\frac{X_1}{D - X_1}} = a \dots \dots \dots (86)$$

Pak jmenovatel zlomku za integračním znaménkem v integrálu 85' můžeme psát ve tvaru

$$(1+z^2)^2 \cdot [z^2(D-X_1) - X_1] = (D-X_1) \cdot (z^2+1)^2 \cdot \left(z^2 - \frac{X_1}{D-X_1}\right) = (D-X_1) \cdot (z^2+1)^2 \cdot (z^2-a^2),$$

čili

$$(1+z^2)^2 \cdot [z^2(D-X_1) - X_1] = (D-X_1) \cdot (z+i)^2 \cdot (z-i)^2 \cdot (z+a) \cdot (z-a).$$

Racionálnou funkci

$$\frac{z^2}{(1+z^2)^2 \cdot [z^2(D-X_1) - X_1]} = \frac{z^2}{(D-X_1) \cdot (z^2-a^2) \cdot (z^2+1)^2}$$

rozložme nyní v součet zlomků

$$\frac{z^2}{(1+z^2)^2 \cdot [z^2(D-X_1) - X_1]} = \frac{1}{D-X_1} \cdot \left[\frac{A_1}{z+a} + \frac{A_2}{z-a} + \frac{M_1 z + N_1}{z^2+1} + \frac{M_2 z + N_2}{(z^2+1)^2} \right].$$

Veličiny $A_1, A_2, M_1, N_1, M_2, N_2$ v čitatelích těchto zlomků jsou konstanty, jež určíme z identity

$$z^2 = A_1(z-a)(z^2+1)^2 + A_2(z+a)(z^2+1)^2 + (M_1 z + N_1)(z^2-a^2)(z^2+1) + (M_2 z + N_2) \cdot (z^2-a^2)$$

Z této identity plyne šest rovnic pro šest neznámých hodnot konstant $A_1, A_2, M_1, N_1, M_2, N_2$. Jsou to rovnice:

- I. $A_1 + A_2 + M_1 = 0,$
- II. $a(A_2 - A_1) + N_1 = 0,$
- III. $2(A_1 + A_2) - M_1(a^2 - 1) + M_2 = 0,$
- IV. $2a(A_2 - A_1) - N_1(a^2 - 1) + N_2 - 1 = 0,$
- V. $A_1 + A_2 + (M_1 + M_2) \cdot a^2 = 0,$
- VI. $A_2 - A_1 - a(N_1 + N_2) = 0.$

Z rovnic II., VI. plyne $N_2 = -N_1 \cdot \frac{1+a^2}{a^2}$, což dosazeno do rovnice IV. dá

$$N_1 = \frac{-a^2}{(1+a^2)^2}, \quad N_2 = \frac{1}{1+a^2}, \quad A_2 - A_1 = \frac{a}{(1+a^2)^2}.$$

Z rovnic I, III, V plyne

$$M_1 = 0, \quad M_2 = 0, \quad A_2 = -A_1.$$

Tedy jest

$$A_1 = \frac{-a}{2(1+a^2)^2}, \quad A_2 = \frac{a}{2(1+a^2)^2}.$$

Integrál 85' rovná se tedy součtu integrálů

$$\begin{aligned} t &= \pm \frac{2D^2}{\sqrt{2\gamma}} \cdot \int_{z_1}^z \frac{z^2}{(1+z^2)^2 \cdot [z^2(D-X_1) - X_1]} dz = \frac{2D^2}{\sqrt{2\gamma} \cdot (D-X_1)} \cdot \int_{z_1}^z \frac{z^2}{(1+z^2)^2 \cdot (z^2-a^2)} dz = \\ &= \frac{\pm 2D^2}{(D-X_1)\sqrt{2\gamma}} \cdot \left[\int_{z_1}^z \frac{-a}{2(1+a^2)^2} dz + \int_{z_1}^z \frac{a}{2(1+a^2)^2} dz + \int_{z_1}^z \frac{-a^2}{(1+a^2)^2} dz + \int_{z_1}^z \frac{1}{(1+z^2)^2} dz \right], \end{aligned}$$

čili

$$t = \pm \frac{2D^2}{(D-X_1)(1+a^2)\sqrt{2\gamma}} \cdot \left[\frac{a}{2(1+a^2)} \cdot \left(\int_{z_1}^z \frac{dz}{z-a} - \int_{z_1}^z \frac{dz}{z+a} - 2a \cdot \int_{z_1}^z \frac{dz}{1+z^2} \right) + \int_{z_1}^z \frac{dz}{(1+z^2)^2} \right] \quad (87)$$

Použijeme-li vzorce 15' pro integrál $\int_{z_1}^z \frac{dz}{(1+z^2)^2}$, obdržíme integraci vý-

razu 87 (v němž ostatní integrály jsou známé integrály logarithmů resp. arc tangenty) rovnici

$$t = \pm \frac{D}{\sqrt{2\gamma}} \cdot \left[\frac{a}{1+a^2} \cdot \left(\lg \frac{z-a}{z+a} - 2a \operatorname{arc} \operatorname{tg} z \right) + \frac{z}{1+z^2} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} z \right] \quad (88)$$

Dosadíme-li do této rovnice ze substituce 84 za meze

$$z = \sqrt{\frac{x}{D-x}}, \quad z_1 = \sqrt{\frac{R_1}{D-x_1}},$$

resp. za $a = \sqrt{\frac{X_1}{D-X_1}}$ (viz 86), obdržíme pro dobu letu t střely, vržené s povrchu (R_1) hvězdy I do vzdálenosti x od gravitačního středu S_1 směrem $\overrightarrow{S_1 S_2}$ ke hvězdě II, vzorec

$$t = \pm \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \cdot \left[\sqrt{X_1 \cdot (D-X_1)} \cdot \lg \frac{\left(\sqrt{\frac{x}{D-x}} - \sqrt{\frac{X_1}{D-X_1}} \right) \cdot \left(\sqrt{\frac{R_1}{D-R_1}} + \sqrt{\frac{X_1}{D-X_1}} \right)}{\left(\sqrt{\frac{x}{D-x}} + \sqrt{\frac{X_1}{D-X_1}} \right) \cdot \left(\sqrt{\frac{R_1}{D-R_1}} - \sqrt{\frac{X_1}{D-X_1}} \right)} - \right. \\ \left. - 2X_1 \cdot \left\{ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{x}{D-x}} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{R_1}{D-R_1}} \right\} + \sqrt{x(D-x)} - \sqrt{R_1(D-R_1)} + \right. \\ \left. + D \left\{ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{x}{D-x}} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{R_1}{D-R_1}} \right\} \right] \quad (88')$$

Je-li $D > X_1 \geq x > R_1 > 0$,

pak jest též

$$\frac{X_1}{D-X_1} > \frac{x}{D-x} > \frac{R_1}{D-R_1}.$$

V tomto případě tedy jest

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{x}{D-x}} - \sqrt{\frac{X_1}{D-X_1}} \right) \cdot \left(\sqrt{\frac{R_1}{D-R_1}} + \sqrt{\frac{X_1}{D-X_1}} \right)}{\left(\sqrt{\frac{x}{D-x}} + \sqrt{\frac{X_1}{D-X_1}} \right) \cdot \left(\sqrt{\frac{R_1}{D-R_1}} - \sqrt{\frac{X_1}{D-X_1}} \right)} < 1,$$

logarithmus tohoto zlomku je tedy záporný.

Zvětšuje-li se $x \leq X_1$ až se stane $x = X_1$ pak se tento zlomek stane rovný nule a jeho logarithmus bude rovný $-\infty$.

Abychom výrazem 88' obdrželi dobu letu t čítanou kladně, musíme v něm vzít znaménko „—“.

Pro $x = X_1$ jest $z = a$. Z obou vzorců 88, 88' je zřejmo, že v tomto případě dostaneme pro dobu letu střely s povrchu hvězdy I. až do bodu N_1 ve vzdálenosti X_1 , v němž jest výsledná gravitace $g = 0$, hodnotu $t = \infty$.

Aby střela vržená počátečnou rychlostí $V_{0,1}$ s hvězdy I. po spojnicí $\overrightarrow{S_1 S_2}$ gravitačních středů dvou hvězd I, II dospěla do bodu N_1 , v němž se gravitační síly obou hvězd vyvažují, potřebovala by k tomu doby nekonečně dlouhé. Podobně by v tomto případě uvažovaná střela potřebovala nekonečně dlouhé doby, aby z bodu N_1 zase spadla buď na hvězdu I nebo na hvězdu II. Výsledek tento, jenž na první pohled poněkud překvapuje, pochopíme spíše, uvažíme-li, že střela, jež byla s tělesa I vržena rychlostí $V_{0,1}$ dospívá do bodu N_1 s rychlostí $v_m = 0$ a v tomto bodě na ni nepůsobí žádná síla ($g = 0$).

Vzorec 88' můžeme též psát ve tvaru

$$t = \frac{-1}{\sqrt{2\gamma}} \cdot \left[\sqrt{X_1 \cdot (D - X_1)} \lg \frac{\left(\sqrt{\frac{X_1}{D - X_1}} - \sqrt{\frac{x}{D - x}} \right) \cdot \left(\sqrt{\frac{R_1}{D - R_1}} + \sqrt{\frac{X_1}{D - X_1}} \right)}{\left(\sqrt{\frac{x}{D - x}} + \sqrt{\frac{X_1}{D - X_1}} \right) \cdot \left(\sqrt{\frac{X_1}{D - X_1}} - \sqrt{\frac{R_1}{D - R_1}} \right)} + \right. \\ \left. + (D - 2X_1) \cdot \left(\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{D - x}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{R_1}{D - R_1}} \right) + \sqrt{x(D - x)} - \sqrt{R_1(D - R_1)} \right] \quad (88'')$$

β) *Budiž* $x_1 = x_2 = X_2$, *t. j.* $V_0 = V_{0.2}$.

Tu máme řešiti integrál

$$t = \pm \frac{2D^2}{\sqrt{2\gamma}} \cdot \int_{z_1}^z \frac{z^2}{(1 + z^2)^2 \cdot [z^2(D - X_2) - X_2]} \cdot dz,$$

čili

$$t = \pm \frac{2D^2}{\sqrt{2\gamma}(D - X_2)} \cdot \int_{z_1}^z \frac{z^2}{(1 + z^2)^2 \cdot \left[z^2 + \frac{X_2}{X_2 - D} \right]} dz.$$

Označme kladný zlomek

$$\frac{X_2}{X_2 - D} = a^2 \quad \dots \quad (86')$$

Tím uvažovaný integrál pro dobu letu t nabude tvaru

$$t = \pm \frac{2D^2}{(X_2 - D)\sqrt{2\gamma}} \cdot \int_{z_1}^z \frac{z^2 dz}{(1 + z^2)^2 \cdot (z^2 + a^2)} \quad \dots \quad (89)$$

Racionálnou lomenou funkcí

$$\frac{z^2}{(1 + z^2)^2 \cdot (z^2 + a^2)}$$

rozložíme v součet zlomků

$$\frac{z^2}{(1 + z^2)^2 \cdot (z^2 + a^2)} = \frac{M_1 z + N_1}{z^2 + 1} + \frac{M_2 z + N_2}{(z^2 + 1)^2} + \frac{M_3 z + N_3}{z^2 + a^2},$$

v nichž veličiny $M_1, N_1; M_2, N_2; M_3, N_3$ jsou konstanty, jež určíme z identity

$(M_1 z + N_1)(z^2 + 1)(z^2 + a^2) + (M_2 z + N_2)(z^2 + a^2) + (M_3 z + N_3) \cdot (z^2 + 1)^2 = z^2$, která má platiti pro každé z . Proto koeficienty u každé mocniny z^i ($i = 0, 1, \dots, 5$) v této identitě musí býti rovny nule, takže obdržíme šest rovnic pro šest konstant $M_1, N_1, M_2, N_2, M_3, N_3$, jež máme určit.

Jsou to rovnice

$$M_1 + M_3 = 0; \quad M_1(1 + a^2) + M_2 + 2M_3 = 0; \quad M_1 a^2 + M_2 a^2 + M_3 = 0; \\ N_1 + N_3 = 0; \quad N_1(1 + a^2) + N_2 + 2N_3 = 0; \quad N_1 a^2 + N_2 a^2 + N_3 = 0.$$

Z prvních tří rovnic plyne ihned

$$M_1 = M_2 = M_3 = 0.$$

Ze zbývajících tří rovnic pak snadno obdržíme

$$N_1 = \frac{a^2}{(a^2 - 1)^2}; \quad N_2 = -\frac{1}{a^2 - 1}; \quad N_3 = -\frac{a^2}{(a^2 - 1)^2}.$$

Platí tedy rovnost

$$\frac{z^2}{(1 + z^2)^2 \cdot (z^2 + a^2)} = \frac{a^2}{(a^2 - 1)^2} \cdot \frac{1}{1 + z^2} - \frac{1}{a^2 - 1} \cdot \frac{1}{(1 + z^2)^2} - \frac{a^2}{(a^2 - 1)^2} \cdot \frac{1}{a^2 + z^2},$$

čili

$$\frac{z^2}{(1+z^2)^2 \cdot (z^2+a^2)} = \frac{1}{a^2-1} \cdot \left[\frac{a^2}{a^2-1} \left(\frac{1}{1+z^2} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{z}{a}\right)^2} \right) - \frac{1}{(1+z^2)^2} \right].$$

Pomocí tohoto rozkladu rozřešíme integrál

$$\begin{aligned} \int \frac{z^2 dz}{(1+z^2)^2 \cdot (z^2+a^2)} &= \frac{1}{a^2-1} \left[\frac{a^2}{a^2-1} \left(\int \frac{dz}{1+z^2} - \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{z}{a}\right)}{1+\left(\frac{z}{a}\right)^2} \right) - \int \frac{dz}{(1+z^2)^2} \right] \\ &= \frac{1}{a^2-1} \left[\frac{a^2}{a^2-1} \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} z - \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{z}{a} \right) - \frac{z}{2(1+z^2)} - \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} z \right] \\ &= \frac{1}{a^2-1} \left[\frac{a^2}{a^2-1} \left(\frac{a^2+1}{2a^2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} z - \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{z}{a} \right) - \frac{z}{2(1+z^2)} \right]. \end{aligned}$$

Jest tedy

$$\int \frac{z^2 dz}{(1+z^2)^2 \cdot (z^2+a^2)} = \frac{1}{2(a^2-1)^2} \cdot \left[(a^2+1) \operatorname{arc} \operatorname{tg} z - 2a \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{z}{a} - (a^2-1) \cdot \frac{z}{1+z^2} \right]$$

Doba, které potřebuje střela vržená počátečnou rychlostí $V_{0,2}$ (vzorec 59) s povrchu (R_1) hvězdy I po spojnici gravitačních středů $S_1 \rightarrow S_2$ na hvězdu II, aby dospěla do vzdálenosti $x = D \cdot \frac{z^2}{1+z^2}$ (viz 84) od gravitačního středu S_1 hvězdy I, jest tedy dána výrazem

$$t = \frac{2D^2}{(X_2-D)\sqrt{2\gamma}} \cdot \int_{z_1}^z \frac{z^2 \cdot dz}{(1+z^2)^2 \cdot (z^2+a^2)} = \frac{D^2}{(X_2-D) \cdot (a^2-1)^2 \sqrt{2\gamma}} \cdot \left[(a^2+1) \operatorname{arc} \operatorname{tg} z - 2a \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{z}{a} - (a^2-1) \frac{z}{1+z^2} \right] \dots \dots \dots (90)$$

Dosadíme-li do tohoto výrazu za a^2 z rovnice 86', obdržíme po úpravě

$$t = \frac{X_2-D}{\sqrt{2\gamma}} \cdot \left[\frac{2X_2-D}{X_2+D} \cdot (\operatorname{arc} \operatorname{tg} z - \operatorname{arc} \operatorname{tg} z_1) - 2 \sqrt{\frac{X_2}{X_2-D}} \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} z \sqrt{\frac{X_2-D}{X_2}} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} z_1 \sqrt{\frac{X_2-D}{X_2}} \right) - \frac{D}{X_2-D} \cdot \left(\frac{z}{1+z^2} - \frac{z_1}{1+z_1^2} \right) \right] \dots \dots \dots (90')$$

Použijeme-li pak dříve již odvozených vztahů 42, 40', 60, můžeme dosaditi za

$$\begin{aligned} X_2-D &= \frac{D\sqrt{\mu_2}}{|\mu_1-\sqrt{\mu_2}|}; \quad \sqrt{\frac{X_2}{X_2-D}} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}; \quad \sqrt{\frac{X_2-D}{X_2}} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}; \quad \frac{D}{X_2-D} = \frac{\sqrt{\mu_1}-\sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_2}} \\ \frac{2X_2-D}{X_2-D} &= \frac{\sqrt{\mu_1}+\sqrt{\mu_2}}{2\sqrt{\mu_1}-\sqrt{\mu_2}}; \quad \frac{X_2-D}{\sqrt{2\gamma}} = \frac{\sqrt{\mu_2}D^3}{[\sqrt{\mu_1}-\sqrt{\mu_2}]^2}, \end{aligned}$$

takže vyšetřovaná doba letu střely t pak bude dána vztahem

$$t = \frac{\sqrt{\frac{\mu_2 D^3}{2}}}{[\sqrt{\mu_1}-\sqrt{\mu_2}]^2} \cdot \left[\frac{\sqrt{\mu_1}+\sqrt{\mu_2}}{2\sqrt{\mu_1}-\sqrt{\mu_2}} \cdot (\operatorname{arc} \operatorname{tg} z - \operatorname{arc} \operatorname{tg} z_1) - 2 \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} z \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} z_1 \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} \right) - \frac{\sqrt{\mu_1}-\sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_2}} \left(\frac{z}{1+z^2} - \frac{z_1}{1+z_1^2} \right) \right] \dots \dots \dots (90'')$$

Dosadíme-li sem konečně ze substituce 84 zpět za $z = \sqrt{\frac{x}{D-x}}$,

$z_1 = \sqrt{\frac{R_1}{D-R_1}}$, obdržíme výraz

$$t = \frac{\sqrt{\frac{\mu_2 D^3}{2}}}{[\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}]^2} \cdot \left[\frac{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}{2\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}} \cdot \left(\arctg \sqrt{\frac{x}{D-x}} - \arctg \sqrt{\frac{R_1}{D-R_1}} \right) + \right. \\ \left. + 2 \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \left(\arctg \sqrt{\frac{\mu_2 R_1^2}{\mu_1 (D-R_1)^2}} - \arctg \sqrt{\frac{\mu_2 x^2}{\mu_1 (D-x)^2}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{D\sqrt{\mu_2}} [\sqrt{R_1(D-R_1)} - \sqrt{x(D-x)}] \right] \dots \dots \dots (90''')$$

Podle rovnic 29 značí zde $\mu_1 = g_1 \cdot R_1^2$, $\mu_2 = g_2 \cdot R_2^2$, při čemž g_1 , g_2 jsou intensity gravitačních polí obou uvažovaných hvězd na jejich povrchu, t. j. ve vzdálenostech R_1 , resp. R_2 od jejich středů S_1 , resp. S_2 . Dále jest $D = S_1 S_2$. x jest proměnná vzdálenost střely od gravitačního středu S_1 hvězdy I. Vzorec 90 udává nám dobu letu t střely vržené počátečnou rychlostí

$$V_{0.2} = \sqrt{\frac{2}{D}} \cdot \left[\sqrt{\frac{\mu_1 (D-R_1)}{R_1}} + \sqrt{\frac{\mu_2 R_1}{D-R_1}} \right]$$

s povrchu (U_1 , R_1) hvězdy I, kteréž doby střela potřebuje, aby dospěla do vzdálenosti x na přímce $\overrightarrow{U_1 S_2}$, po níž jest vržena.

Vzorec 90 udává tuto dobu pro případ, kdy jest $\mu_1 \neq \mu_2$. Je-li $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ pak z něho obdržíme

$$t = \frac{\sqrt{\frac{\mu D^3}{2}}}{[\sqrt{\mu} - \sqrt{\mu}]^2} \cdot [2(\arctg z - \arctg z_1) - 2(\arctg z - \arctg z_1)] = \frac{0}{0},$$

tedy hodnotu neurčitou.

Je-li $\mu_1 \neq \mu_2$, $x = D$ pak ze vzorce 90''' dostaneme výraz pro dobu letu střely s povrchu hvězdy I až do středu hvězdy II. Při tom bychom ovšem museli předpokládati, že hmota hvězdy II je všechna soustředěna v jejím středu S_2 a nekladla by tedy (na poloměru R_2) žádných překážek střele letící ku středu S_2 . Dostali bychom

$$t = \frac{\sqrt{\frac{\mu_2 D^3}{2}}}{[\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}]^2} \cdot \left[\frac{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}{2\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \sqrt{\frac{R_1}{D-R_1}} \right) - 2 \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \left(\frac{\pi}{2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \arctg \sqrt{\frac{\mu_2 R_1^2}{\mu_1 (D-R_1)^2}} \right) + \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{D\sqrt{\mu_2}} \cdot \sqrt{R_1(D-R_1)} \right] \dots \dots \dots (91)$$

Střela vržená s povrchu (U_1 , R_1) hvězdy I (μ_1 , R_1) počátečnou rychlostí $V_{0.2}$ po spojnici gravit. center $\overrightarrow{S_1 S_2}$ dopadne na povrch (U_2 , R_2) hvězdy II, t. j. do vzdálenosti $x = D - R_2$ od gravit. středu S_1 , za dobu

$$t = \frac{\sqrt{\frac{\mu_2 D^3}{2}}}{[\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}]^2} \cdot \left[\frac{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}{2\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}} \cdot \left(\arctg \sqrt{\frac{D-R_2}{R_1}} - \arctg \sqrt{\frac{R_1}{D-R_1}} \right) - \right. \\ \left. - 2 \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \left(\arctg \sqrt{\frac{\mu_2 (D-R_2)^2}{\mu_1 R_2^2}} - \arctg \sqrt{\frac{\mu_2 R_1^2}{\mu_1 (D-R_1)^2}} \right) - \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{D\sqrt{\mu_2}} \cdot \sqrt{R_2(D-R_2)} - \sqrt{R_1(D-R_1)} \right] \dots \dots \dots (92)$$

Přístupme k rozboru případu b, kdy jest buď $x_1 = D$, nebo $x_2 = D$ a kdy jest (jak již bylo odvozeno) doba letu střely dána integrálem (82)

$$t = \pm \int_{R_1}^x \sqrt{\frac{-x}{2\gamma(x-x_2)}} \cdot dx$$

Má-li býti $x_1 = D$, pak plyne z první rovnice 65

$$[\gamma D - (\mu_1 - \mu_2)]^2 = [\gamma D + (\mu_1 - \mu_2)]^2 - 4\gamma D \mu_1,$$

tedy

$$4\gamma D \mu_1 = 4\gamma D (\mu_1 - \mu_2) \\ \mu_1 = \mu_1 - \mu_2.$$

Je zřejmo, že v tomto případě musí býti $\mu_2 = 0$.

Má-li býti $x_2 = D$, obdržíme z druhé rovnice 65 stejným způsobem, že též musí být $\mu_2 = 0$.

To však znamená, že hvězda II nemá žádné přitažlivosti, nemá žádného gravitačního pole, tedy fyzikálně „neexistuje“.

Poněvadž součin kořenů $x_1 \cdot x_2$ má býti $x_1 \cdot x_2 = \frac{\mu_1}{D} \cdot D$, tedy v případě, kdy jest jeden kořen rovný D musí býti druhým kořenem $\frac{\mu_1}{D}$. Je-li $x_1 = D$, jest $x_2 = \frac{\mu_1}{D}$ a naopak.

Výraz pro dobu letu střely pak nabude tvaru

$$t = \pm \int_{R_1}^x \sqrt{\frac{x}{2\gamma(x_2 - x)}} dx = \int_{R_1}^x \sqrt{\frac{x}{2\mu_1 - 2\gamma x}} \cdot dx.$$

Podle rovnice 51 jest však pro $\mu_2 = 0$

$$\gamma = \frac{\mu_1}{R_1} - \frac{V_0^2}{2} = g_1 R_1 - \frac{V_0^2}{2}$$

Označme zase, jako jsme byli označili v úvahách o vrhu v gravitačním poli jediné hvězdy (3)

$$V_0^2 - 2g_1 R_1 = -2\gamma = A.$$

Pak tedy jest

$$t = \int_{R_1}^x \sqrt{\frac{x}{2\mu_1 + A x}} \cdot dx.$$

Dospěli jsme tedy vskutku k témuž integrálu pro dobu letu střely, který jsme byli již dříve vyřešili (vzorec 4') v úvaze o „svislém“ vrhu v gravitačním poli jediné hvězdy.

Příklad 25: Střela byla vržena se země (viz obr. 4) po přímce $\overrightarrow{U_1 S_2}$ počátečnou rychlostí $V_0 = 11.117 \text{ km/sek} = V_{0.2}$.

a) Za jakou dobu dospěje tato střela do vzdálenosti $X_1 = 345670 \text{ km}$ od středu zemského?

Počítejme na př. podle vzorce 90.

$$\text{Dosadíme do něho za } z = \sqrt{\frac{x}{D-x}}, z_1 = \sqrt{\frac{R_1}{D-R_1}}, a = \sqrt{\frac{X_2}{X_2-D}}$$

ze vzorců 84, 86, při čemž položíme $x = X_1$.

Dále jest $R_1 = 6377.4 \text{ km}$, $D = 384390 \text{ km}$, $X_2 = 432890 \text{ km}$ a² = 8.9256, $z^2 = 8.9273$, $\gamma = \gamma_2 = 0.81882$.

Vypočteme, že jest $\lg \frac{D^2}{(X_2 - D)(a^2 - 1)^2 \sqrt{2} \gamma_2} = 4.57864$.

Označme $\arctg z = \xi$, $\arctg z_1 = \xi_1$, $\arctg \frac{z}{a} = z$, $\arctg \frac{z_1}{a} = z_1$.

Jest tedy $\lg z = \lg \lg \xi = 0.47536$, jemuž odpovídá $\xi^0 = 71^\circ 29' 29''$ čili $\xi^0 = 257370''$, $\lg \arctg z = \lg \arctg \xi = 0.09613$.

Poněvadž jest $\lg(a^2 + 1) = 0.99675$, obdržíme $(a^2 + 1) \cdot \arctg z = 12.385$.

Dále jest $\lg \frac{z}{a} = \lg \lg z = 0.00004$, čemuž odpovídá $z = 45^\circ 0' 10'' = 162010''$; $\lg \arctg \frac{z}{a} = \lg \arctg z = 1.89512$. Poněvadž pak jest $\lg 2a = 0.77635$, dostáváme dále $2a \arctg \frac{z}{a} = 4.6932$.

Dále vypočteme, že jest $(a^2 - 1) \frac{z}{1 + z^2} = 2.3854$.

Tak jsme obdrželi

$$(a^2 + 1) \arctg z - 2a \arctg \frac{z}{a} - (a^2 - 1) \frac{z}{1 + z^2} = 12.385 - 4.6932 - 2.3854 = 5.306.$$

Stejným postupem vyřešíme: $z_1^2 = 0.01687$, $\lg z_1 = \lg \lg \xi_1 = 1.11357$.

Jemu přísluší $\xi_1^0 = 7^\circ 24' 2'' = 26642''$, $\lg \arctg z_1 = \lg \arctg \xi_1 = 1.11113$; $(a^2 + 1) \cdot \arctg z_1 = 1.28200$.

Dále jest $\lg \frac{z_1}{a} = \lg \lg z_1 = 2.63825$, jemuž odpovídá $z_1^0 = 2^\circ 29' 22'' = 8962''$; $2a \arctg \frac{z_1}{a} = 0.25961$; $(a^2 - 1) \cdot \frac{z_1}{1 + z_1^2} = 1.01235$.

Tak jest

$$(a^2 + 1) \arctg z_1 - 2a \arctg \frac{z_1}{a} - (a^2 - 1) \frac{z_1}{1 + z_1^2} = 1.282 - 0.25961 - 1.01235 = 0.01004.$$

Ze vzorce 90 pak obdržíme

$$t = \frac{D^2}{(X_2 - D)(a^2 - 1)^2 \sqrt{2} \gamma_2} \cdot [5.306 - 0.01] = 200720 \text{ sek}$$

čili

$$t = 2 \text{ dny } 7 \text{ hodin } 45 \text{ minut } 20 \text{ vteřin.}$$

b) *Za jakou dobu doletí uvažovaná střela na měsíc?*

Počítáme-li hledanou dobu opět pomocí vzorce 90, pozmění si oproti předešlému příkladu jen hodnota trojčlenu

$$(a^2 + 1) \arctg z - 2a \arctg \frac{z}{a} - (a^2 - 1) \frac{z}{1 + z^2}$$

v němž nyní bude

$$z = \sqrt{\frac{D - R_2}{R_2}}, \text{ tedy } z^2 = 219.81.$$

Označíme zase $\xi = \arctg z$, $\alpha = \arctg \frac{z}{a}$. Stejným způsobem, jako v příkladě předešlém (a), vypočteme, že jest

$$\xi = 86^\circ 8' 30'' = 310110'', \quad \alpha = 78^\circ 36' 25'' = 282985''$$

$$\lg \arctg z = 0.17708 \quad \lg \arctg \frac{z}{a} = 0.13734$$

$$\lg(a^2 + 1) = 0.99675 \quad \lg 2a = 0.77635$$

$$\lg 14.922 = 1.17383 \quad \lg 8.1977 = 0.91369; (a^2 - 1) \cdot \frac{z}{1 + z^2} = 0.53215$$

Tak jest

$$(a^2 + 1) \arctg z - 2a \arctg \frac{z}{a} - (a^2 - 1) \frac{z}{1 + z^2} = 14.922 - 8.1977 - 0.53215 = 6.19215$$

$$t = \frac{D^2}{(X_2 - D)(a^2 - 1)^2 \sqrt{2} \gamma_2} \cdot [6.19215 - 0.01004] = 234305 \text{ sek}$$

čili

$$t = 2 \text{ dny } 17 \text{ hodin } 5 \text{ minut } 5 \text{ vteřin.}$$

Můžeme srovnati dobu $t = 200720$ sek, kterou jsme obdrželi v příkladě 25 a s dobou $t = 206110$ sek, kterou jsme dostali v příkladě 8d. Obě doby jsou počítány pro stejnou dráhu střely $X_1 - R_1$, při stejné počáteční rychlosti střely $V_{0.2} = 11.117$ km/sek. Vlivem gravitace měsíce se doba letu střely v tomto případě zkrátí o 5390 vteřin, t. j. o 1 hodinu 29 minut 50 vteřin.

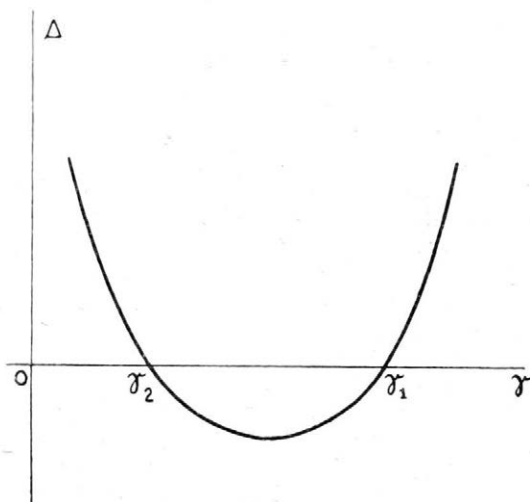
OPRAVY.

Oprava chyby v první části tohoto pojednání (Vojenské Rozhledy, III, číslo 11, strana 565):

V řádku 6. shora ve výsledku ($= 12158$ sek) má být $= 12399$ sek; v důsledku toho pak má být v řádku 7. shora „ $t = 3$ hodiny 26 minut 39 vteřin“ a v řádku 10. shora „o 18 minut 9 vteřin“.

V řádku 12. zdola má být „ $t = 13821$ sek $= 3$ hodiny 50 minut 21 vteřin“.

V 1. čísle roč. IV. na straně 29. mezi druhým a třetím řádkem shora má být obrázek 6. který byl vynechán.



Obr. 6.

Autor.