

Kapitán prof. Jan GEBAUER:

## *Problém výstřelu s planety na planetu.*

### **Problém balistický.**

(Pokračování.)

**Závislost okamžité rychlosti střely  $v$  na její vzdálenosti  $x$  od gravitačního centra  $S_1$ , vypočtená za předpokladu platnosti zákona o zachování energie.**

Střela vypálená z bodu  $U_1$  počátečnou rychlostí  $V_0$  směrem  $\overrightarrow{U_1 U_2}$  opouští bod  $U_1$  s počátečnou energií kinetickou  $m \cdot \frac{V_0^2}{2}$ . Hmotu

střely zde zase označujeme  $m$ . Urazila-li tato střela ve směru  $\overrightarrow{U_1 U_2}$  dráhu  $x - R_1$  pak překonáváním výsledné gravitační síly  $g \cdot m$  vykonala na této dráze práci

$$m \cdot \int_{R_1}^x g \cdot dx = m \cdot \int_{R_1}^x (g_1 - g_2) \cdot dx.$$

Tento pracovní výkon musí být kompenzován změnou kinetické energie uvažované střely, tedy poklesem (nebo správněji změnou) její rychlosti. Označme rychlost střely ve vzdálenosti  $x$  od gravitačního středu  $S_1$  písmenou  $v$ .

Podle zákona o zachování energie má tedy být

$$m \cdot \int_{R_1}^x (g_1 - g_2) \cdot dx = m \cdot \frac{V_0^2}{2} - m \cdot \frac{v^2}{2}, \quad (47)$$

odkudž ihned plyne

$$v^2 = V_0^2 + 2 \cdot \int_{R_1}^x (g_2 - g_1) dx \quad (48)$$

Dosadíme-li do této rovnice za  $(g_2 - g_1)$  z rovnice 36, obdržíme

$$v^2 = V_0^2 + 2 \cdot \int_{R_1}^x \left[ \frac{\mu_2}{(D-x)^2} - \frac{\mu_1}{x^2} \right] dx$$

čili

$$v^2 = V_0^2 + 2 \mu_2 \cdot \int_{R_1}^x \frac{dx}{(D-x)^2} - 2 \mu_1 \cdot \int_{R_1}^x \frac{dx}{x^2} \quad (48')$$

Integraci rovnice 48' dostaneme ihned

$$v^2 = V_0^2 + 2 \mu_2 \cdot \left[ \frac{1}{D-x} - \frac{1}{D-R_1} \right] + 2 \mu_1 \cdot \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{R_1} \right] \quad (49)$$

čili

$$v = \pm \sqrt{V_0^2 + 2(x - R_1) \cdot \left[ \frac{\mu_2}{(D-x) \cdot (D-R_1)} - \frac{\mu_1}{x \cdot R_1} \right]} \quad (49')$$

Položíme-li v rovnici 49  $\mu_2 = 0$  a píšeme-li  $\mu_1 = \mu$ ,  $x = R$ ,  $R_1 = R_0$ , ve shodě s kapitolou, jednající o svislém vrhu v gravitačním poli jedné hvězdy, pak obdržíme z rovnice 49 rovnici 3, dříve uvedenou.

Rovnice 49, nebo 49' podává hledanou závislost okamžité rychlosti střely  $v$  na její vzdálenosti  $x$  od gravitačního středu  $S_1$ .

**Příklad 10.:** Hvězdou I budiž země, hvězdou II měsíc. Střela byla vržena se země rychlostí  $V_0 = 30$  km/sek po spojnici gravitačních středů obou těchto hvězd. (Viz příklad 1, v němž jest též  $V_0 = 30$  km/sek).

a) Vyšetřme rychlost uvažované střely ve vzdálenosti  $X_1 = 345670$  km od středu zemského. K výpočtu uijeme vzorce 49', do něhož dosadíme za  $x = X_1$ ,  $R_1 = 6377.4$  km,  $D = 384390$  km,  $\mu_1 = 408490$ ,  $\mu_2 = 5010.5$ . Pak obdržíme

$$v = \sqrt{900 + 2 \times 339293 \times \left[ \frac{5010.5}{38720 \times 378023} - \frac{408490}{345670 \times 6377.4} \right]},$$

čili

$$v = \sqrt{900 + 2 \times 339293 [0.00000034232 - 0.00018108]} = \sqrt{900 - 122.65},$$

čili  $v = 27.881$  km/sek.

V příkladě 1, jenž se od tohoto příkladu liší jen tím, že tam nebereme zřetele na gravitační pole měsíce, jsme vypočetli pro touž vzdálenost  $X_1$  rychlost  $v = 27.877$  km/sek, tedy rychlost jen o 0.004 km/sek menší. Gravitační vliv měsíce na uvažovanou střelu způsobil zde tedy jen poměrně nepatrný přírůstek rychlosti.

b) *Vyšetřme rychlost se kterou by uvažovaná střela dopadla na povrch měsíce, t. j. do vzdálenosti  $x = D - R_2$  od středu zemského.* Rovnice 49', které zde použijeme, nabývá pro  $x = D - R_2$  tvaru

$$v = \sqrt{V_0^2 + 2(D - R_1 - R_2) \cdot \left[ \frac{\mu_2}{R_2(D - R_1)} - \frac{\mu_1}{R_1(D - R_2)} \right]}. \quad (49'')$$

Dosadíme-li sem zase za  $V_0^2 = 900$ ,  $D = 384390$ ,  $R_1 = 6377.4$ ,  $R_2 = 1740.8$ ,  $\mu_1 = 408490$ ,  $\mu_2 = 5010.5$ , obdržíme

$$v = \sqrt{900 + 2 \times 376272 \times [0.0000076143 - 0.00016358]} = \sqrt{900 - 117.37}$$

čili  $v = 27.976$  km/sek.

*Příklad 11.: Podmínky stejně jako v příkladě předcházejícím, jen počáteční rychlost střely jest jiná,  $V_0 = 11.189$  km/sek.*

a) *Vyšetřme rychlost této střely ve vzdálenosti  $X_1 = 345670$  km od středu zemského!* Ve vzorci 49', jehož jsme v příkladě 9a použili, změní se jen hodnota  $V_0^2$  (nyní jest  $V_0^2 = 2g_1 R_1 = 125.19$ ), jinak tento vzorec zůstane beze změny. Dostaneme tedy

$$v = \sqrt{125.19 - 122.65} = 1.59_4 \text{ (poslední místo jest nepřesné).}$$

V příkladě 2, již dříve vyřešeném, dostali jsme za obdobných podmínek ( $V_0$ ,  $X_1$ , atd.) rychlost  $v = 1.520$  km/sek, tedy rychlost o 0.074 km/sek menší. Přírůstek rychlosti způsobený gravitačním vlivem měsíce na dráze  $X_1 - R_1$  uvažované střely jest v tomto případě značně větší než byl v příkladě 9a a to proto, že zde gravitace měsíce působila na střelu po delší dobu.

b) *S jakou rychlostí by tato střela dopadla do vzdálenosti  $D - R_2$  od zemského středu, t. j. na povrch měsíce?* K výpočtu použijeme rovnice 49''. Všimněme si, že oproti příkladu 9b pozmění se v této rovnici jen  $V_0^2$  (nyní jest  $V_0^2 = 125.19$ ). Tedy platí

$$v = \sqrt{V_0^2 - 117.37} = \sqrt{125.19 - 117.37},$$

čili  $v = 2.7964$  km/sek.

*Příklad 12.: Podmínky tytéž jako v příkladech předešlých, jen počáteční rychlost jest jiná,  $V_0 = 11.086$  km/sek.* Jest to (podle příkladu 5) ona počáteční rychlost, již by bylo nutno udělit střele, aby ve vakuu dospěla do vzdálenosti  $X_1$  od zemského středu, kdyby nebylo gravitace jiných hvězd.

a) *Jakou rychlost má uvažovaná střela ve vzdálenosti  $X_1$ ?* Ve vzorci 49', jehož zase použijeme, změní se opět jen  $V_0^2$  (podle př. 5. jest  $V_0^2 = 122.88$ ). Obdržíme

$$v = \sqrt{122.88 - 122.65} = \sqrt{0.23} = 0.4796.$$

Kdyby nebylo gravitace měsíce (příklad 5), měla by střela  $X_1$  rychlost nulovou. Vlivem přitažlivosti měsíce, jež na střelu působila velmi dlouhou dobu (viz příklad 5), má střela ve vzdálenosti  $X_1$  dosti značnou rychlost  $v = 480$  m/sec.

b) *S jakou rychlostí dopadne tato střela na povrch měsíce?* Vzorec 49'' nám zde dává  $v = \sqrt{V_0^2 - 117 \cdot 37} = \sqrt{122 \cdot 88 - 117 \cdot 37} = 2 \cdot 3474$  km/sec.

**Příklad 13.:** *Střela byla vržena s měsíce z bodu  $U_2$  (viz obr. 4.) po spojnici gravitačních středů  $\overrightarrow{S_2 U_2 U_1 S_1}$  počátečnou rychlostí  $V_0 = 2 \cdot 3993$  km/sec (viz příklad 4.).*

a) *Jaká bude její rychlost ve vzdálenosti  $D - X_1 = 38720$  km od grav. středu měsíce?* Ponecháme-li zase pro zemi označení I,  $R_1$ ,  $\mu_1$ , pro měsíc označení II,  $R_2$ ,  $\mu_2$ , pak jest  $x = D - X_1$  a vzorec 49' můžeme psát ve tvaru

$$v = \sqrt{V_0^2 + 2(x - R_2) \cdot \left[ \frac{\mu_1}{(D - x)(D - R_2)} - \frac{\mu_2}{x \cdot R_2} \right]}, \dots (49''')$$

čili

$$v = \sqrt{V_0^2 + 2(D - X_1 - R_2) \cdot \left[ \frac{\mu_1}{X_1 \cdot (D - R_2)} - \frac{\mu_2}{R_2(D - X_1)} \right]}.$$

Dosadíme-li do tohoto vzorce za  $V_0^2$ ,  $D - X_1$ ,  $R_2$ ,  $D$ ,  $X_1$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  známé (resp. dané) hodnoty, obdržíme  $V_0^2 = 2 g_2 R_2 = 5 \cdot 7566$ ;

$$v = \sqrt{5 \cdot 7566 + 2 \times 36979 \times \left[ \frac{408490}{382649 \times 345670} - \frac{5010 \cdot 5}{38720 \times 1741 \cdot 8} \right]},$$

čili

$$v = \sqrt{5 \cdot 7566 + 2 \times 36979 \times [0 \cdot 000003018 - 0 \cdot 000074337]},$$

čili

$$v = \sqrt{5 \cdot 7566 - 5 \cdot 2746} = 0 \cdot 69423 \text{ km/sec.}$$

Srovnáme-li tento výsledek s výsledkem  $v = 0 \cdot 50873$  km/sec, který jsme byli obdrželi v příkladě 4, vidíme, že gravitačním vlivem měsíce byl způsoben přírůstek rychlosti o  $0 \cdot 1855$  km/sec.

b) *S jakou rychlostí dopadne uvažovaná střela na povrch zeměkoule t. j. do vzdálenosti  $x = D - R_1$  od gravitačního středu měsíce?*

Rychlost tuto vypočteme ze vzorce 49''', dosadíme-li v něm za  $x = D - R_1$ . Dostaneme pak

$$v = \sqrt{V_0^2 + 2(D - R_1 - R_2) \cdot \left[ \frac{\mu_1}{R_1(D - R_2)} - \frac{\mu_2}{(D - R_1)R_2} \right]}, \dots (49_1)$$

Srovnáme-li tento vzorec 49<sub>1</sub> se vzorcem 49'', vidíme, že se liší jen znaménkem druhého členu pod odmocnínkem. V příkladě 10b jsme vyřešili hodnotu tohoto členu. Je dána číslem 117·37. Platí tedy obecně pro rychlost dopadu  $v$  na zemi střely vržené s měsíce počátečnou rychlostí  $V_0$  po přímce  $\overrightarrow{U_2 U_1}$ :

$$v = \sqrt{V_0^2 + 117 \cdot 37} \dots (49_2)$$

V našem případě, kdy jest  $V_0^2 = 5 \cdot 7566$  obdržíme

$$v = \sqrt{5 \cdot 7566 + 117 \cdot 37} = 11 \cdot 096 \text{ km/sec.}$$

**Příklad 14.:** *Podmínky tytéž jako v příkladě 13, jen počátečná rychlost střely jest jiná. Jest  $V_0 = 2 \cdot 345$  km/sec (Srovnej příklad 7.) V gravi-*

tačním poli pouze měsíčním by tato střela doletěla právě do vzdálenosti  $D - X_1 = 38720$  km od středu měsíce, v této vzdálenosti by se zastavila a pak padala zpět na měsíc.

a) *Vyšetřme rychlost uvažované střely v bodě  $N_1$  (viz obr. 5) v gravitačním poli měsíce a země!* V rovnici 49'' se změní opět jen  $V_0^2$ , jež má (podle příkladu 7.) hodnotu  $V_0^2 = 5.4978$ . Jinak se rovnice tato  $v = \sqrt{V_0^2 - 5.2746}$  nezmění. Bude tedy

$$v = \sqrt{5.4978 - 5.2746} = 0.47243 \text{ km/sek.}$$

Rychlost tato byla způsobena gravitačním vlivem zeměkoule na uvažovanou střelu.

b) *S jakou rychlostí dopadne tato střela na povrch zeměkoule?*

Rychlost tuto obdržíme ihned ze vzorce 49<sub>2</sub>, dosadíme-li do něho za  $V_0^2 = 5.4978$ . Dostaneme

$$v = \sqrt{5.4978 + 117.37} = 11.085 \text{ km/sek.}$$

*Příklad 15.: Podmínky stejné jako v příkladě 10., jenom počáteční rychlost jest jiná. Budiž  $V_0 = 11.117$  km/sek.*

a) *Jakou rychlost bude mít tato střela ve vzdálenosti  $X_1 = 345670$  km od středu zemského?* Počítáme podle vzorce 49' a použijeme ovšem hodnot již odvozených v příkladě 10. Najdeme, že jest

$$v = \sqrt{V_0^2 - 122.65} = \sqrt{123.58 - 122.65} = 0.964^4 \text{ km/sek.}$$

Srovnáme tento příklad s příkladem 8c, v němž bylo počítáno jen s gravitačním polem zemským. Vidíme, že vliv gravitace měsíce způsobil zde přírůstek rychlosti střely o 128 m/sek.

b) *S jakou rychlostí dopadne tato střela na povrch měsíce, t. j. do vzdálenosti  $D - R_2$  od středu zemského?* Počítáme podle rovnice 49'' a k výpočtu použijeme hodnot již odvozených v příkladě 10b. Jest tedy

$$v = \sqrt{V_0^2 - 117.37} = \sqrt{123.58 - 117.37} = 2.492 \text{ km/sek.}$$

*Diskuse rovnice 49'.* Rovnice tato dává reálné hodnoty v pro ony vzdálenosti  $D$ , pro něž jest výraz pod odmocninou ve vzorci 49' větší než nula, nebo na nejméně rovný nule.

Střela na své dráze nabude rychlosti  $v = 0$ , t. j. zastaví se (aspoň na okamžik), je-li podle rovnice 49

$$V_0^2 + \frac{2\mu_2}{D-x} - \frac{2\mu_2}{D-R_1} + \frac{2\mu_1}{x} - \frac{2\mu_1}{R_1} = 0,$$

čili

$$\frac{\mu_2}{D-x} + \frac{\mu_1}{x} = \frac{\mu_2}{D-R_1} + \frac{\mu_1}{R_1} - \frac{V_0^2}{2}. \quad (50)$$

Označme

$$\frac{\mu_2}{D-R_1} + \frac{\mu_1}{R_1} - \frac{V_0^2}{2} = \frac{R_1(\mu_2 - \mu_1) + D\mu_1}{R_1(D-R_1)} - \frac{V_0^2}{2} = \gamma. \quad (51)$$

Pak můžeme rovnici 50 psátí ve tvaru

$$\frac{x(\mu_2 - \mu_1) + D\mu_1}{x(D-x)} = \gamma, \quad (50')$$

čili

$$\gamma \cdot x^2 + (\mu_2 - \mu_1 - \gamma D) \cdot x + \mu_1 D = 0. \quad (50'')$$

Uvažovaná střela zastaví se tedy na své dráze ve vzdálenosti  $x_1$  od středu  $S_1$  hvězdy I, kteráž vzdálenost  $x_1$  musí vyhovovati kvadratické rovnici 50''. Kořeny rovnice 50'' jsou

$$x_{1,2} = \frac{D}{2} + \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\gamma} \pm \frac{1}{2\gamma} \sqrt{\gamma^2 D^2 - \gamma \cdot 2D(\mu_1 + \mu_2) + (\mu_1 - \mu_2)^2} \quad (52)$$

Kořeny tyto jsou buď dva reálné různé, nebo dva reálné stejné, nebo dva komplexně sdružené, podle toho, je-li diskriminant

$$\Delta = \gamma^2 D^2 - \gamma \cdot 2D(\mu_1 + \mu_2) + (\mu_1 - \mu_2)^2$$

větší než nula, rovný nule, nebo menší než nula.

Poněvadž předpokládáme veličiny  $D$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  co dané konstanty, závisí hodnota diskriminantu  $\Delta$  jedině od velikosti veličiny  $\gamma$ , jež jest dána rovnicí 51. Velikost veličiny  $\gamma$  pak podle rovnice 51 závisí opět jen na velikosti počátečné rychlosti  $V_0$ , jelikož veličiny  $R_1$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $D$  pokládáme za dané. Hodnota diskriminantu  $\Delta$  závisí tedy od velikosti počátečné rychlosti  $V_0$  a proto můžeme říci: od počátečné rychlosti střely závisí, existuje-li na její dráze bod, v němž rychlost střely klesne na hodnotu nulovou.

Mezný případ, kdy ještě existuje na dráze střely bod, v němž se střela zastaví, t. j. kdy existují reálné kořeny 52 rovnice 50'', nastane tehdy, když bude diskriminant  $\Delta = 0$ . Podmínka tato dává nám rovnici

$$\Delta = \gamma^2 D^2 - \gamma \cdot 2D(\mu_1 + \mu_2) + (\mu_1 - \mu_2)^2 = 0 \quad (53)$$

Kořeny této kvadratické rovnice 53 jsou

$$\gamma_{1,2} = \frac{2D(\mu_1 + \mu_2) \pm \sqrt{4D^2 \cdot (\mu_1 + \mu_2)^2 - 4D^2 \cdot (\mu_1 - \mu_2)^2}}{2D^2}$$

čili

$$\gamma_{1,2} = \frac{\mu_1 + 2\sqrt{\mu_1\mu_2} + \mu_2}{D} = \frac{(\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2})^2}{D} \quad (54)$$

Dosadíme-li tyto kořeny  $\gamma_{1,2}$  do rovnice 51, budeme moci pak z ní vypočísti počátečné rychlosti  $V_0$ , jež tomuto (vlastně těmto dvěma) mezním případům přísluší. Bude pak

$$\frac{V_0^2}{2} = \frac{R_1(\mu_2 - \mu_1) + D\mu_1}{R_1(D - R_1)} - \frac{(\sqrt{\mu_1} \pm \sqrt{\mu_2})^2}{D} \quad (55)$$

Výraz tento upravme. Převědeme-li v něm oba zlomky na společného jmenovatele, obdržíme

$$V_0^2 = 2 \frac{\mu_1[R_1^2 - 2DR_1 + D^2] \pm 2\sqrt{\mu_1}(D - R_1)\sqrt{\mu_2}R_1 + \mu_2 R_1^2}{DR_1(D - R_1)},$$

čili

$$V_0^2 = 2 \cdot \frac{[(D - R_1) \cdot \sqrt{\mu_1} + R_1 \cdot \sqrt{\mu_2}]^2}{DR_1(D - R_1)}, \quad (55')$$

nebo

$$V_0^2 = \frac{2}{D} \cdot \left[ \sqrt{\frac{\mu_1(D - R_1)}{R_1}} \pm \sqrt{\frac{\mu_2 R_1}{D - R_1}} \right]^2 = \frac{2}{D} \left[ \frac{\mu_1(D - R_1)}{R_1} + \frac{\mu_2 R_1}{D - R_1} \pm 2\sqrt{\mu_1\mu_2} \right] \quad (55'')$$

Odmocněním dostaneme

$$V_0 = \sqrt{\frac{2}{DR_1(D - R_1)}} \cdot [(D - R_1)\sqrt{\mu_1} \pm R_1\sqrt{\mu_2}] \quad (56)$$

čili

$$V_0^2 = \sqrt{\frac{2}{D}} \cdot \left[ \sqrt{\frac{\mu_1(D - R_1)}{R_1}} \pm \sqrt{\frac{\mu_2 R_1}{D - R_1}} \right] \quad (56')$$

51. Má-li střela v bodě  $U_1$ , z něhož jest vržena, tuto počátečnou rychlost danou rovnicí 56 (nebo identickou rovnicí 56'), pak jest diskriminant  $\Delta$  v rovnici 52 rovný nule, t. j. rovnice tato pak dává dva reálné a stejné kořeny. Avšak rovnicí 56 (nebo 56') jsou dány dvě rychlosti  $V_0$ , podle toho, vezmeme-li v ní buď znaménko „—“ nebo „+“. Rychlosti tyto označme  $V_{0.1}$ ,  $V_{0.2}$ .

Rychlosti

$$V_{0.1} = \sqrt{\frac{2}{D}} \cdot \left[ \sqrt{\frac{\mu_1(D-R_1)}{R_1}} - \sqrt{\frac{\mu_2 R_1}{D-R_1}} \right], \dots \dots \dots (57)$$

ke které patří

$$\gamma_1 = \frac{[\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}]^2}{D}, \dots \dots \dots (58)$$

přísluší pak podle rovnice 52 dva stejné reálné kořeny, jež označíme  $X_1$ . Hodnotu  $X_1$  obdržíme, položíme-li v rovnici 52 diskriminant  $\Delta = 0$  a dosadíme-li za  $\gamma = \gamma_1$  z rovnice 58. Dostaneme po úpravě

$$X_1 = \frac{D \sqrt{\mu_1}}{[\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}]}, \dots \dots \dots (39')$$

ktehou jsme byli již dříve odvodili co vzdálenost bodu  $N_1$  (v němž jest výsledné grav. přirychlení  $g = 0$ ) od středu  $S_1$ .

Dospěli jsme tedy k tomuto výsledku: *Aby střela, vržená z bodu  $U_1$  na hvězdě I směrem  $\overrightarrow{U_1 S_2}$  ke hvězdě II, dospěla na své dráze do bodu  $N_1$  (ležícího mezi oběma hvězdami, v němž jest výsledné gravitační přirychlení  $g = g_1 - g_2 = 0$ ) a v tomto bodě se zastavila, jest nutno ji z bodu  $U_1$  vrhnouti počátečnou rychlostí  $V_{0.1}$ , danou rovnicí 57.*

Rychlosti

$$V_{0.2} = \sqrt{\frac{2}{D}} \cdot \left[ \sqrt{\frac{\mu_1(D-R_1)}{R_1}} + \sqrt{\frac{\mu_2 R_1}{D-R_1}} \right], \dots \dots \dots (59)$$

ke které patří

$$\gamma_2 = \frac{[\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}]^2}{D}, \dots \dots \dots (60)$$

přísluší podle rovnice 52 rovněž dva stejné reálné kořeny, jež označíme  $X_2$ . Hodnotu  $X_2$  dostaneme z rovnice 52, položíme-li v ní  $\Delta = 0$ ,  $\gamma = \gamma_2$  (viz 60). Obdržíme po úpravě vzorec

$$X_2 = \frac{D \cdot \sqrt{\mu_1}}{[\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}]}, \dots \dots \dots (40')$$

jež jsme rovněž již byli odvodili a to pro vzdálenost bodu  $N_2$  od středu  $S_1$ . Tehdy jsme dokázali, že body  $S_1, S_2, N_1, N_2$  tvoří harmonickou čtveřinu a bod  $N_2$  leží tedy v každém případě vně úsečky  $\overline{S_1 S_2}$ , takže má jen matematický význam.

*Příklad 16.: Vyšetřme závislost veličiny  $\gamma$  na počátečné rychlosti  $V_0$  při vrhu po přímce  $\overrightarrow{U_1 \vec{U}_2}$  se země na měsíc!*

Dosadíme-li do vzorce 51 za  $\mu_1, \mu_2, R_1, D - R_1$  hodnoty příslušné zemi a měsíci, obdržíme

$$\gamma = 62.596 + 0.013254 - \frac{V_0^2}{2} = 62.609254 - \frac{V_0^2}{2}$$

čili

$$\gamma = 62.61 - \frac{V_0^2}{2}.$$

- a) V příkladě 5 jsme našli  $V_0 = 11.086$  km/sek, t. j.  $V_0^2 = 122.88$ .  
Tehdy jest  $\gamma = 62.61 - 61.44 = +1.17$ .
- b) V příkladě 2 jsme našli  $V_0^2 = 2 g_1 R_1 = 125.19$ ,  $V_0 = 11.189$  km/sek.  
Tehdy jest  $\gamma = 62.61 - 62.595 = +0.004$ .
- c) V příkladě 1 jsme měli  $V_0 = 30$  km/sek,  $V_0^2 = 900$ .  
Tehdy jest  $\gamma = 62.61 - 450 = -387.39$ .

*Příklad 17.: Vyšetřme závislost veličiny  $\gamma$  na počátečné rychlosti  $V_0$  při vrhu po přímce  $\vec{U}_2 \vec{U}_1$  s měsíce na zemi!*

Hledanou závislost obdržíme ze vzorce 51, píšeme-li v něm  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $R_2$  místo  $\mu_2$ ,  $\mu_1$ ,  $R_1$  a dosadíme-li za  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $R_2$ ,  $D$  známé hodnoty. Dostaneme

$$\gamma = \frac{\mu_2}{R_2} + \frac{\mu_1}{D - R_2} - \frac{V_0^2}{2} = 2.8783 + 1.3753 - \frac{V_0^2}{2}$$

čili

$$\gamma = 4.2536 - \frac{V_0^2}{2}.$$

- a) V příkladě 3 jsme našli  $V_0 = 2.3993$  km/sek,  $V_0^2 = 5.7566$ .  
Tehdy jest  $\gamma = 4.2536 - 2.8783 = +1.3753$ .
- b) V příkladě 7 jsme našli  $V_0 = 2.345$  km/sek,  $V_0^2 = 5.4978$ .  
Tehdy jest  $\gamma = 4.2536 - 2.7489 = +1.5047$ .

*Příklad 18.: Vyšetřme minimální rychlost  $V_{0.1}$ , jež by musela být udělena střele vržené se země vzduchoprázdným prostorem po přímce  $\vec{U}_1 \vec{U}_2$ , aby střela tato dospěla do bodu  $N_1$ , resp. dopadla na měsíc!*

Rychlost  $V_{0.1}$  vyšetřme ze vzorce 57, dosadíme-li do něho za  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $R_1$ ,  $D$  známé hodnoty. Výpočtem pak obdržíme

$$\left| \frac{\mu_1(D - R_1)}{R_1} \right| - \left| \frac{\mu_2 R_1}{D - R_1} \right| = 4864.4 - 9.2 = 4855.2$$

$$V_{0.1} = 11.075 \text{ km/sek.}$$

Veličinu  $\gamma_1$ , příslušnou této počátečné rychlosti  $V_{0.1}$ , obdržíme ze vzorce 58, dosadíme-li do něho za  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $D$ . Jest

$$\gamma_1 = \frac{[|\mu_1| + |\mu_2|]^2}{D} = \frac{[631.81 + 70.785]^2}{384390},$$

čili

$$\gamma_1 = 1.2842.$$

*Příklad 19.: Vyšetřme hodnotu  $V_{0.2}$  počátečné rychlosti střely, při níž se anuluje diskriminant rovnice 52.*

Budeme počítati pomocí vzorce 59. Použijeme-li hodnot již vyřešených v příkladě předešlém, dostaneme

$$\left| \frac{\mu_1(D - R_1)}{R_1} \right| + \left| \frac{\mu_2 R_1}{D - R_1} \right| = 4864.4 + 9.2 = 4873.6$$

$$V_{0.2} = 11.117 \text{ km/sek.}$$

Této počátečné rychlosti  $V_{0.2}$  přísluší veličina  $\gamma_2$ , kterou vyřešíme ze vzorce 60, použijeme-li opět hodnot již nalezených v příkladě předešlém. Obdržíme

$$\gamma_2 = \frac{[|\mu_1| - |\mu_2|]^2}{D} = \frac{[631.81 - 70.785]^2}{384390},$$

čili

$$\gamma_2 = 0.81882.$$

**Příklad 20.:** Vyšetřme minimální počátečnou rychlost  $V_{0,1}$ , jež by musela být udělena střele vržené s měsíce vzduchoprázdným prostorem po přímce  $\vec{U}_2 \vec{U}_1$ , aby střela tato dospěla do bodu  $N_1$ , resp. aby dopadla na zemi.

Použijeme zase vzorce 57, avšak budeme v něm psát  $\mu_1, \mu_2, R_2$  na místo  $\mu_2, \mu_1, R_1$ . Vzorec tento pak nabude tvaru

$$V_{0,1} = \sqrt{\frac{2}{D} \cdot \left[ \sqrt{\frac{\mu_2(D-R_2)}{R_2}} - \sqrt{\frac{\mu_1 R_2}{D-R_2}} \right]} \quad (57')$$

Dosadíme-li sem za  $\mu_2, D, R_2, \mu_1$  známé hodnoty, dostaneme

$$\sqrt{\frac{\mu_2(D-R_2)}{R_2}} - \sqrt{\frac{\mu_1 R_2}{D-R_2}} = 1049.475 - 42.615 = 1006.86,$$

$$V_{0,1} = 2.2967 \text{ km/sek.}$$

Této počátečné rychlosti přísluší podle vzorce 58 stejná veličina  $\gamma_1$ , kterou jsme již byli vyšetřili v příkladě 18, totiž  $\gamma_1 = 1.2842$ .

**Příklad 21.:** Pro výstřel s měsíce, uvažovaný v předešlém příkladě, vyšetřme druhou počátečnou rychlost  $V_{0,2}$ , při níž se anulují diskriminant rovnice 52.

Budeme opět počítati pomocí vzorce 59, v němž však budeme zase psát  $\mu_1, \mu_2, R_2$  na místo  $\mu_2, \mu_1, R_1$ . Tak dostaneme vzorec

$$V_{0,2} = \sqrt{\frac{2}{D} \cdot \left[ \sqrt{\frac{\mu_2(D-R_2)}{R_2}} + \sqrt{\frac{\mu_1 R_2}{D-R_2}} \right]} \quad (59')$$

Použijeme-li hodnot již vyšetřených v předešlém příkladě, dostaneme

$$\sqrt{\frac{\mu_2(D-R_2)}{R_2}} + \sqrt{\frac{\mu_1 R_2}{D-R_2}} = 1049.475 + 42.615 = 1092.09$$

$$V_{0,2} = 2.4911 \text{ km/sek.}$$

Veličina  $\gamma_2$ , jež přísluší této počátečné rychlosti, jest opět stejná s veličinou  $\gamma_2$  odvozenou v příkladě 19, jak je zřejmo z výrazu 60. Jest  $\gamma_2 = 0.81882$ .

### **Diskuse závislosti veličiny $\gamma$ a diskriminantu $\Delta$ na počátečné rychlosti $V_0$ .**

Rovnice 51 podává závislost veličiny  $\gamma$  na počátečné rychlosti  $V_0$ . Z rovnice této jest patrné, že veličina  $\gamma$  klesá s rostoucí rychlostí  $V_0$  a sice se čtvercem této rychlosti. Rychlost  $V_0$  můžeme si mysliti měnitelnou v rozsahu  $0 \leq V_0 \leq \infty$ . Roste-li  $V_0$  v tomto rozsahu, klesá  $\gamma$  od své největší hodnoty

$$\gamma_0 = \frac{R_1(\mu_2 - \mu_1) + D\mu_1}{R_1(D - R_1)}, \text{ jež přísluší rychlosti } V_0 = 0, \dots (61)$$

až po hodnotu  $\gamma = -\infty$ , příslušnou rychlosti  $V_0 = \infty$ .

Podle předpokladu, který jsme byli již dříve učinili, že jest  $D > R_1 + R_2$ , jest  $\gamma_0 > 0$ . Klesajíc s rostoucím  $V_0$ , nabývá veličina  $\gamma$  hodnoty nulové pro počátečnou rychlost

$$V_{0,0} = \sqrt{\frac{2[R_1(\mu_2 - \mu_1) + D\mu_1]}{R_1(D - R_1)}}, \text{ jíž přísluší } \gamma = 0. \dots (62)$$

Je-li  $V_0 < \sqrt{\frac{2[R_1(\mu_2 - \mu_1) + D\mu_1]}{R_1(D - R_1)}}$ , jest  $\gamma > 0$ , je-li  $V_0 > \sqrt{\frac{2[R_1(\mu_2 - \mu_1) + D\mu_1]}{R_1(D - R_1)}}$ ,

jest  $\gamma < 0$ . Kvadratickou závislost diskriminantu  $\Delta$  na veličině  $\gamma$  lze znázorniti parabolou (obr. 6.). Diskriminant  $\Delta$  nabývá záporné hodnoty pro všechny kladné hodnoty  $\gamma$ , jež leží v intervalu

$$\gamma_2 = \frac{(|\mu_1| - |\mu_2|)^2}{D} < \gamma < \frac{(|\mu_1| + |\mu_2|)^2}{D} = \gamma_1 \quad \dots \quad (63)$$

Pro všechny jiné hodnoty  $\gamma$  jest diskriminant  $\Delta$  kladný.

Z toho jest tedy patrné, že komplexní kořeny  $x_{1,2}$  rovnice 52 obdržíme pro ony hodnoty  $\gamma$ , jež leží v kladném intervalu 63.

Stane-li se  $\gamma$  jednou z obou mezi  $\gamma_1, \gamma_2$  tohoto intervalu stane se  $\Delta = 0$ , rovnice 52 dá pak jen jeden kořen  $X_1$ , resp.  $X_2$ , jak jsme již byli odvodili. Pro ostatní možné hodnoty  $\gamma$ , t. j. pro všechny záporné hodnoty  $\gamma$ , jakož i pro kladné hodnoty  $\gamma$  dvou intervalů

$$\gamma_0 = \frac{R_1(\mu_2 - \mu_1) + D\mu_1}{R_1(D - R_1)} > \gamma > \gamma_1 = \frac{(|\mu_1| + |\mu_2|)^2}{D}; \quad \gamma_2 = \frac{(|\mu_1| - |\mu_2|)^2}{D} > \gamma > 0$$

jest diskriminant  $\Delta$  kladný a rovnice 52 dává dva reálné různé kořeny  $x_{1,2}$ .

Intervalu 63, t. j. komplexním kořenům  $x_{1,2}$ , přísluší interval proměnnosti počáteční rychlosti

$$V_{0,2} > V_0 > V_{0,1} \quad \dots \quad (64)$$

jehož meze jsou dány vzorci 59, 57.

Interval tento má rozsah

$$V_{0,2} - V_{0,1} = 2 \sqrt{\frac{2 R_1 \mu_2}{D(D - R_1)}}$$

Dospěli jsme k výsledku: Kořeny  $x_{1,2}$  rovnice 52 jsou reálné různé je-li počáteční rychlost střely v intervalech  $V_{0,1} > V_0 > 0$ , nebo  $\infty > V_0 > V_{0,2}$ . Kořeny  $x_{1,2}$  jsou reálné stejné, je-li buď  $V_0 = V_{0,1}$ , nebo  $V_0 = V_{0,2}$ . Kořeny  $x_{1,2}$  jsou komplexně sdružené, je-li počáteční rychlost  $V_0$  v intervalu 64.

**Příklad 22.:** Vypočti hodnoty  $\gamma_0, V_{0,0}$  příslušné výstřelu se země na měsíc po přímce  $\vec{U}_1 \vec{U}_2$ !

Podle vzorce 61 jest pro  $V_0 = 0$  (viz příklad 16)

$$\gamma_0 = 62.61.$$

Podle vzorce 62 jest pro  $\gamma = 0$

$$V_{0,0}^2 = 125.22, \text{ tedy } V_{0,0} = 11.19 \text{ km/sek.}$$

**Příklad 23.:** Vypočti hodnoty  $\gamma_0, V_{0,0}$  příslušné výstřelu s měsíce na zem po přímce  $\vec{U}_2 \vec{U}_1$ .

Podle vzorce 61 jest pro  $V_0 = 0$  (viz příklad 17)

$$\gamma_0 = 4.2536.$$

Podle vzorce 62 jest pro  $\gamma = 0$

$$V_{0,0}^2 = 8.5072, \text{ tedy } V_{0,0} = 2.9167 \text{ km/sek.}$$

**Diskuse kořenů  $x_{1,2}$  rovnice 52.** Znaménku „+“ před odmocninou v této rovnici nechť odpovídá kořen  $x_1$ , znaménku „-“ kořen  $x_2$ . Rovnici 52 můžeme psáti též takto:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2\gamma} \cdot [\gamma D + (\mu_1 - \mu_2) \pm \sqrt{[\gamma D + (\mu_1 - \mu_2)]^2 - 4\gamma D \mu_1}] \quad \dots \quad (52')$$

Pak jest

$$\begin{aligned} x_1 - D &= \frac{1}{2\gamma} \cdot \left[ -\gamma D + \mu_1 - \mu_2 + \sqrt{[\gamma D + \mu_1 - \mu_2]^2 - 4\gamma D \mu_1} \right] \\ x_2 - D &= \frac{1}{2\gamma} \cdot \left[ -\gamma D + \mu_1 - \mu_2 - \sqrt{[\gamma D + \mu_1 - \mu_2]^2 - 4\gamma D \mu_1} \right] \end{aligned} \quad (65)$$

Z kvadratické rovnice 50'' plyne, že součin  $x_1 \cdot x_2$  obou jejích kořenů jest

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{\mu_1 \cdot D}{\gamma}, \quad (66)$$

a součet obou kořenů že jest

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{\gamma} \cdot [\mu_1 - \mu_2 + \gamma D], \quad (67)$$

Je-li  $\gamma > 0$ , jest pak součin  $x_1 \cdot x_2$  obou kořenů kladný, t. j. oba kořeny jsou téhož znaménka: je-li  $\gamma < 0$ , jsou znaménka obou kořenů různá, jak plyne z rovnice 66. Je-li  $\gamma = 0$ , pak jest  $x_1 = \infty$ ,  $x_2 = \frac{D \mu_1}{\mu_1 - \mu_2}$ , jak jest patrné z rovnic 52', 50'.

Vynásobíme-li oba výrazy 65, jež jsme vyšetřili pro úsečky  $(x_1 - D)$ ,  $(x_2 - D)$ , obdržíme

$$(x_1 - D) \cdot (x_2 - D) = \frac{D \cdot \mu_2}{\gamma}, \quad (68)$$

tedy součin tento řídí se zase znaménkem veličiny  $\gamma$ .

Předpokládejme, že kořeny  $x_1$ ,  $x_2$  jsou reálné.

Budiž dále  $\gamma > 0$ . Podle těchto předpokladů omezujeme počátečnou rychlost střely  $V_0$  na intervaly

$$V_{0,0} = \sqrt{\frac{2[R_1(\mu_2 - \mu_1) + D \mu_1]}{R_1(D - R_1)}} > V_0 \geq V_{0,2}, \text{ resp. } V_{0,1} \geq V_0 > 0, \quad (69)$$

jichž meze  $V_{0,2}$ ,  $V_{0,1}$  jsou dány výrazy 59, 57.

Reálným těmito kořenům  $x_1$ ,  $x_2$  přísluší body  $N'$ ,  $N''$ , jež obdržíme, nanese-li úsečky  $x_1$ ,  $x_2$  od počátku  $S_1$  na osu  $x = S_1 S_2$  a to buď v kladném, nebo záporném směru této osy, podle znaménka úseček  $x_1$ ,  $x_2$ . V tomto případě leží oba body  $N'$ ,  $N''$  na přímce  $S_1 S_2$  v téže směru od gravitačního středu  $S_1$ , poněvadž jest

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{\mu_1 \cdot D}{\gamma} > 0, \text{ jakož i v téže směru od gravitačního středu } S_2,$$

$$\text{poněvadž jest } (x_1 - D) \cdot (x_2 - D) = \frac{D \mu_2}{\gamma} > 0.$$

Je-li  $\gamma < 0$ , t. j.

$$V_0 > \sqrt{\frac{2[R_1(\mu_2 - \mu_1) + D \mu_1]}{R_1(D - R_1)}} = V_{0,0},$$

pak kořeny  $x_1$ ,  $x_2$  jsou vždy reálné. Tehdy body  $N'$ ,  $N''$ , jež těmito kořenům přísluší, leží po obou stranách gravitačního centra  $S_1$  (viz 66), jakož i po obou stranách gravitačního centra  $S_2$  (viz 68), tudíž vně úsečky  $S_1 S_2$ . V tomto případě oba body  $N'$ ,  $N''$  vybočily z úsečky  $U_1 U_2$ , pro níž platí základní rovnice  $g = g_1 - g_2$ , tedy nepatří pro ně učiněné předpoklady a body tyto pak již nemají pro nás praktického významu.

Proto se nadále budeme zabývat jen případem, kdy jest  $\gamma_0 > 0$ . Že jest  $V_{0.0} > V_{0.2}$ , jest patrné z rovnice 55, kterou vzhledem ke vzorcům 62, 59 můžeme psát ve tvaru

$$\frac{V_{0.2}^2}{2} = \frac{V_{0.0}^2}{2} - \frac{[\mu_1 - \mu_2]^2}{D}.$$

Z rovnice 67 plyne

$$x_1 + x_2 = D + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\gamma}.$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu z rovnice 51 za  $\gamma$

$$\gamma = \frac{R_1(\mu_2 - \mu_1) + D\mu_1}{R_1(D - R_1)} - \frac{V_0^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{2[R_1(\mu_2 - \mu_1) + D\mu_1]}{R_1(D - R_1)} - V_0^2 \right],$$

což jest podle rovnice 62 rovno

$$\gamma = \frac{1}{2} \cdot [V_{0.0}^2 - V_0^2], \dots \dots \dots (51')$$

obdržíme

$$x_1 + x_2 = D + \frac{2(\mu_1 - \mu_2)}{V_{0.0}^2 - V_0^2} \dots \dots \dots (70)$$

*Budiž  $\mu_1 > \mu_2$ .*

Z výrazu 70 je nyní zřejmo: Roste-li počáteční rychlost  $V_0$  v intervalu své proměnnosti  $0 < V_0 < V_{0.0}$ , pak součet kořenů  $x_1 + x_2$  rovnice 50'' roste od hodnoty

$$(x_1 + x_2)_0 = D + \frac{2(\mu_1 - \mu_2)}{V_{0.0}^2} = \frac{R_1^2 \mu_2 + (D^2 - R_1^2) \mu_1}{R_1 \mu_2 + (D - R_1) \mu_1} > 0,$$

jež odpovídá nulové počáteční rychlosti ( $V_0 = 0$ ), až po hodnotu

$$x_1 + x_2 = \infty, \text{ když jest } V_0 = V_{0.0}.$$

Překročí-li počáteční rychlost  $V_0$  hodnotu  $V_{0.0}$ , pak se hodnota součtu kořenů  $x_1 + x_2$  stane zápornou a bude při rychlosti rostoucí v intervalu

$$V_{0.0} < V_0 < \sqrt{V_{0.0}^2 + \frac{2(\mu_1 - \mu_2)}{D}}$$

stále zápornou. Nabyla-li by počáteční rychlost  $V_0$  hodnoty

$$V_0 = \sqrt{V_{0.0}^2 + \frac{2(\mu_1 - \mu_2)}{D}} = \sqrt{\frac{2[\mu_1(D^2 - R_1^2) + \mu_2 R_1^2]}{D \cdot R_1 \cdot (D - R_1)}} = \sqrt{\frac{2}{D} \left[ \frac{\mu_1(D + R_1)}{R_1} + \frac{\mu_2 R_1}{D - R_1} \right]},$$

pak se stane

$$x_1 + x_2 = 0.$$

Vzroste-li počáteční rychlost  $V_0$  ještě nad hodnotu  $\sqrt{V_{0.0}^2 + \frac{2(\mu_1 - \mu_2)}{D}}$ ,

stane se součet kořenů  $x_1 + x_2$  zase kladným a poroste s rostoucí rychlostí  $V_0$ , avšak poroste-li počáteční rychlost  $V_0$  do nekonečna, bude se součet  $x_1 + x_2$  asymptoticky blížit velikosti úsečky  $D = \overline{S_1 S_2}$ .

*Budiž  $\mu_1 < \mu_2$ .*

Z výrazu 70 je zřejmo, že součet kořenů  $x_1 + x_2$  rovnice 50'' bude stále rovný vzdálenosti  $D$  obou gravitačních středů  $\overline{S_1 S_2}$ , ať jest počáteční rychlost  $V_0$  jakkoliv velká. Tehdy jest

$$V_{0.0} = \sqrt{\frac{2D\mu_1}{R_1(D - R_1)}}.$$

*Budiž  $\mu_1 < \mu_2$ .*

Rovnici 70 pak můžeme psát ve tvaru  $x_1 + x_2 = D - \frac{2(\mu_2 - \mu_1)}{V_{0.0}^2 - V_0^2}$ ,

Je-li  $V_0 = 0$  jest

$$x_1 + x_2 = \frac{R_1^2 \mu_2 + (D_1^2 - R_1^2) \mu_1}{R_1 \mu_2 + (D - R_1) \mu_1} > 0$$

Roste-li  $V_0$  v intervalu proměnnosti  $0 < V_0 < \sqrt{V_{0.0}^2 - \frac{2(\mu_2 - \mu_1)}{D}}$ , klesá součet kořenů  $x_1 + x_2$  k nule. Je-li

$$V_0 = \sqrt{V_{0.0}^2 - \frac{2(\mu_2 - \mu_1)}{D}} = \sqrt{\frac{2}{D} \cdot \left[ \frac{\mu_1 (D + R_1)}{R_1} + \frac{\mu_2 R_1}{D - R_1} \right]}$$

jest  $x_1 + x_2 = 0$ . Podle rovnice 67 jest  $x_1 + x_2 = D - \frac{\mu_2 - \mu_1}{\gamma}$ , což v tomto případě má být rovno nule. Musí tedy být  $\gamma = \frac{\mu_2 - \mu_1}{D}$ , což skutečně jest, jak vyplývá z rovnice 51' dosadíme-li do ní za  $V_0^2 = V_{0.0}^2 - \frac{2(\mu_2 - \mu_1)}{D}$ .

V tomto případě se rovnice 50'' redukuje na tvar

$$\gamma \cdot x^2 + \mu_1 D = 0, \text{ čili } (\mu_2 - \mu_1) \cdot x^2 + \mu_1 D^2 = 0,$$

o imaginárních kořenech

$$x_1 = D \sqrt{\frac{-\mu_1}{\mu_2 - \mu_1}}, \quad x_2 = -D \sqrt{\frac{-\mu_1}{\mu_2 - \mu_1}}.$$

Skutečně hodnota  $\gamma = \frac{\mu_2 - \mu_1}{D}$  leží již v intervalu 63, jehož veličiny  $\gamma$  dávají komplexní kořeny  $x_1, x_2$ , neboť jest

$$\frac{\mu_2 - \mu_1}{D} - \frac{[\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}]^2}{D} = \frac{2(\sqrt{\mu_1 \mu_2} - \mu_1)}{D} > 0,$$

$$\frac{\mu_2 - \mu_1}{D} - \frac{[\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}]^2}{D} = -\frac{2(\sqrt{\mu_1 \mu_2} + \mu_1)}{D} < 0.$$

Rychlost  $V_0 = \sqrt{\frac{2}{D} \cdot \left[ \frac{\mu_1 (D + R_1)}{R_1} + \frac{\mu_2 R_1}{D - R_1} \right]}$  jest též větší než  $V_{0.1}$  a menší než  $V_{0.2}$ , jak snadno se přesvědčíme srovnáním pomocí rovnice 57, 59.

Vzroste-li počáteční rychlost nad hodnotu  $\sqrt{V_{0.0}^2 - \frac{2(\mu_2 - \mu_1)}{D}}$ , stane se součet  $x_1 + x_2$  záporným a klesá k hodnotě  $-\infty$ , blíží-li se rostoucí rychlost počáteční hodnotě  $V_{0.0}$ . Pro  $V_0 = V_{0.0}$  jest  $x_1 + x_2 = -\infty$ . Vzroste-li počáteční rychlost  $V_0$  nad hodnotu  $V_{0.0}$ , stane se součet  $x_1 + x_2$  kladným a klesá od hodnoty  $x_1 + x_2 = \infty$  asymptoticky k hodnotě  $D$  s počátečnou rychlostí rostoucí do nekonečna.

**Případ, kdy jest počáteční rychlost  $V_0 = 0$ .** Tehdy jest podle rovnice 51'  $\gamma = \frac{1}{2} \cdot V_{0.0}^2$  a jedním kořenem rovnice 50'' zřejmě jest  $x_1 = R_1$ . Druhým kořenem podle rovnice 66 jest

$$x_2 = \frac{\mu_1 D}{\gamma \cdot R_1} = D \frac{\mu_1 (D - R_1)}{\mu_1 (D - R_1) + \mu_2 R_1} < D.$$

Současně jest  $D - x_1 = D - R_1$ ;  $D - x_2 = D \frac{\mu_2 R_1}{\mu_1 (D - R_1) + \mu_2 R_1}$ .

(Příště dokončení.)