

Problém výstřelu s planety na planetu.**Problém balistický.**

(Pokračování.)

Jak bylo uvedeno na počátku řešení tohoto případu, jest $a = -A = |A|$. Tím jsme tedy vyřešili hodnotu integrálu

$$\int \frac{dv}{(v^2 - A)^2} = \int \frac{dv}{(v^2 + a)^2}.$$

Vyšetřenou hodnotu dosadíme nyní do výrazu 5'. Obdržíme pro dobu letu střely vzorec

$$t = -4\mu \cdot \int_{V_0}^v \frac{dv}{(v^2 - A)^2} = \frac{2\mu}{a} \left[\frac{v}{v^2 + a} + \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \arctg \frac{v}{\sqrt{a}} \right], \quad (18)$$

v němž konstantou jest zase $\mu = g_0 R_0^2$; V_0, v jsou meze integrační.

Podle vzorce 3 jest

$$v = \sqrt{A + \frac{2\mu}{R}} = \sqrt{\frac{2\mu}{R} - a},$$

čili

$$v = \sqrt{\frac{2\mu - aR}{R}} \quad (19)$$

Dosadíme-li touto substitucí 19 za rychlost v vzdálenost R střely od středu hvězdy co novou proměnnou do vzorce 18, dostaneme pro dobu letu střely výraz

$$t = \frac{1}{a} \cdot \left[R \sqrt{\frac{2\mu - aR}{R}} + \frac{2\mu}{\sqrt{a}} \arctg \sqrt{\frac{2\mu - aR}{aR}} \right] \quad (20)$$

Dosadíme-li dále do vzorců 18, 20 meze v, V_0 , resp. R, R_0 , obdržíme

$$t = \frac{2\mu}{a} \cdot \left[\frac{V_0}{V_0^2 + a} - \frac{v}{v^2 + a} + \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\arctg \frac{V_0}{\sqrt{a}} - \arctg \frac{v}{\sqrt{a}} \right) \right], \quad (18')$$

čili

$$t = 2\mu \cdot \left[\frac{V_0 - v}{(V_0^2 + a)(v^2 + a)} + \frac{1}{\sqrt{a^3}} \cdot \arctg \frac{\sqrt{a^3} \cdot (V_0 - v)}{a^2 + V_0^2 \cdot v^2} \right] \quad (18'')$$

resp.

$$t = \frac{1}{a} \cdot \left[R_0 V_0 - \sqrt{R(2\mu - aR)} + \frac{2\mu}{\sqrt{a}} \left(\arctg \frac{V_0}{\sqrt{a}} - \arctg \sqrt{\frac{2\mu}{aR} - 1} \right) \right] \quad (20')$$

Z rovnice 18' obdržíme pro $v = 0$ dobu letu střely až do nejvyššího bodu její dráhy při uvažovaném vrhu svisle vzhůru:

$$t_{v=0} = \frac{2\mu}{a} \cdot \left[\frac{V_0}{V_0^2 + a} + \frac{1}{\sqrt{a}} \arctg \frac{V_0}{\sqrt{a}} \right] \quad (21)$$

Hodnota $t_{v=0}$ kterou nám dává vzorec 21 jest reálná a konečná, pokud jest $a > 0$, tedy $A < 0$, resp. $V_0 < \sqrt{2g_0 R_0}$.

V případě třetím tedy vždy na uvažované přímkové dráze střely existuje bod, v němž se střela zastaví. Rychlost střely, vystřelené s počátečnou rychlostí $V_0 < \sqrt{2g_0 R_0}$ z libovolného bodu U kulového povrchu hvězdy (g_0, R_0) ve směru prodloužení poloměru SU do vzduchoprázdného vesmíru, klesá až po době $t_{v=0}$, dané vzorem 21, nabude uvažovaná střela rychlosti nulové, načež počne padati zpět na hvězdu, s níž byla vržena a dopadne na ni opět po době $t_{v=0}$ (21).

Nejvzdálenější bod dráhy této střely jest ve vzdálenosti

$$R_{v=0} = \frac{2\mu}{a} = \frac{2g_0 R_0^2}{2g_0 R_0 - V_0^2} \dots \dots \dots (22)$$

od středu S uvažované hvězdy a ve vzdálenosti

$$R_{v=0} - R_0 = \frac{R_0 \cdot V_0^2}{2g_0 R_0 - V_0^2} \dots \dots \dots (23)$$

od ústí děla U, z něhož střela byla vržena.

Hodnota $R_{v=0}$ plyne ihned z rovnice 19, položíme-li v ní $v = 0$.

Dosadíme-li do vzorce 20' za $V_0 = 0$, obdržíme

$$t_{v=0} = + \frac{1}{a} \cdot \left[\sqrt{R(2\mu - aR)} + \frac{2\mu}{\sqrt{a}} \arctg \sqrt{\frac{2\mu}{aR} - 1} \right] \dots (24)$$

V tomto případě jde o dobu letu střely t vypuštěné ve vzdálenosti R_0 od středu hvězdy S s počátečnou rychlostí $V_0 = 0$. Střela bude hvězdou přitahována, tedy její vzdálenost R se bude zmenšovat, bude proto $R < R_0$. Jelikož však při tomto pohybu svisle dolů $v =$

$-\frac{dR}{dt}$, tedy $dt = -\frac{dR}{v}$, má v rovnicích 4, 4' 5, a všech následujících pravá strana obdržeti ještě znaménko „—“; proto ve vzorci 24 vyjde t kladně.

Dosadíme-li do vzorce 24 za $a = 2g_0 R_0$, ($V_0 = 0$), $\mu = g_0 R_0^2$ dostaneme po úpravě

$$t_{v=0} = \frac{1}{\sqrt{2g_0 R_0}} \cdot \left[\sqrt{R(R_0 - R)} + R_0 \arctg \sqrt{\frac{R_0 - R}{R}} \right] \dots (24')$$

co dobu, které potřebuje střela puštěná ve vzdálenosti R_0 od středu hvězdy s počátečnou rychlostí $V_0 = 0$, aby proletěla dráhu $R_0 - R$.

Předpokládejme opět, že veškerá hmota uvažované hvězdy jest soustředěna v jejím středu S. Dosadíme-li pak do rovnice 18' za $v = 0$, resp. do rovnice 20' za $R = 0$, obdržíme vzorec pro dobu, které by střela potřebovala, aby proběhla poloměr $R_0 = SU$ jedním nebo druhým směrem, za předpokladů, že bodem U proletuje s počátečnou rychlostí V_0 a na své dráze SU se jí nestaví v cestu žádné překážky. Dostaneme

$$T = \frac{2\mu}{a} \cdot \left[\frac{V_0}{2g_0 R_0} + \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\arctg \frac{V_0}{\sqrt{a}} - \frac{\pi}{2} \right) \right], \dots \dots \dots (25)$$

jelikož $\lim_{v \rightarrow \infty} \arctg \frac{v}{\sqrt{a}} = \frac{\pi}{2}$.

Pro $V_0 = 0$, kdy jest $a = 2 g_0 R_0$, obdržíme z rovnice 25

$$T_{V_0=0} = \frac{\pi \mu}{a^{3/2}} = \pi \frac{g_0 R_0^2}{\sqrt{8 g_0^3 R_0^3}}$$

čili

$$T_{V_0=0} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{R_0}{2 g_0}} \dots \dots \dots (26)$$

Ke stejnému vzorci dospějeme též z rovnice 24', položíme-li v ní $R = 0$.

Při volném pádu v gravitačním poli homogenním potřebovala by střela ku proběhnutí dráhy R_0 při konstantním přirychlení g_0 doby $T_x = 2 \cdot \sqrt{\frac{R_0}{2 g_0}}$. Srovnáním obou posledních vzorců obdržíme relaci

$$T_{V_0=0} = \frac{\pi}{4} \cdot T_x.$$

Příklad 5.: Jakou počáteční rychlost V_0 by bylo zapotřebi vrhnouti střelu svisle vzhůru se země, aby dospěla až do vzdálenosti $X_1 = 345670$ km od středu zemského, v této vzdálenosti se zastavila ($v = 0$) a pak opět padala zpět na zemi?

Položíme-li v rovnici 3 za $v = 0$, $R = X_1$, obdržíme pro hledanou počáteční rychlost výraz

$$V_0 = \sqrt{2 g_0 R_0 - \frac{2 \mu}{X_1}}.$$

Našli jsme již (příklad 1.): $2 g_0 R_0 = 125 \cdot 19$, $\frac{2 \mu}{X_1} = 2 \cdot 3097$, tedy jest

$$V_0 = \sqrt{125 \cdot 19 - 2 \cdot 3097} = 11 \cdot 086 \text{ km/sek.}$$

Za jakou dobu dospěje tato střela do vzdálenosti X_1 , v níž jest $v = 0$?

K výpočtu použijeme vzorce 21, který ještě upravíme. Podle vzorce 19 jest pro $v = 0$, ($R = X_1$), $2 \mu - a X_1 = 0$, tedy $a = \frac{2 \mu}{X_1}$. Dále jest $V_0^2 + a = V_0^2 - A = 2 g_0 R_0$ (viz rovnici 3), takže vzorec 21 dáme tvar obecný

$$t = R \cdot \left[\frac{V_0}{2 g_0 R_0} + \sqrt{\frac{R}{2 \mu}} \cdot \arctg V_0 \cdot \sqrt{\frac{R}{2 \mu}} \right] \dots \dots \dots (21')$$

Pro $R = X_1$ jest

$$t = X_1 \cdot \left[\frac{V_0}{2 g_0 R_0} + \sqrt{\frac{X_1}{2 \mu}} \arctg V_0 \sqrt{\frac{X_1}{2 \mu}} \right]$$

Po dosazení dostaneme

$$t = 345670 \cdot \left[\frac{11 \cdot 086}{125 \cdot 19} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3097}} \cdot \arctg \frac{11 \cdot 086}{\sqrt{2 \cdot 3097}} \right]$$

Označme $u = \frac{11 \cdot 086}{\sqrt{2 \cdot 3097}}$; $\arctg u = \alpha$. Jest tedy $\tg \alpha = u$; $\lg \tg \alpha =$

$\lg u = 0.86297$. K tomuto logarithmu najdeme $\alpha^0 = 82^\circ 11' 37''$.

Jest tedy $\alpha = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{295897}{324000} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3097}}$; $\alpha = 0.94392$,

takže dostáváme

$$t = 345670 \cdot [0.088548 + 0.94392] = 356890 \text{ sek.},$$

čili $t = 4$ dny 3 hodiny 8 minut 10 vteřin,

Příklad 6.: Jakou počátečnou rychlostí V_0 je nutno vrhnouti střelu se země svisle vzhůru, aby dospěla až do vzdálenosti $D = 384390$ km od středu zemského do nejvyššího bodu své dráhy? (D jest již dříve zmíněná střední vzdálenost měsíce od země.)

Z rovnice 3, v níž položíme $v = 0$, $R = D$ obdržíme pro hledanou počátečnou rychlost vzorec

$$V_0 = \sqrt{2 g_0 R_0 - \frac{2\mu}{D}}.$$

Použijeme-li zase hodnot $2 g_0 R_0 = 125.19$, $\frac{2\mu}{D} = 2.077$, jak je již známe z příkladu 1, dostaneme $V_0 = 11.096$ km/sek, tedy počátečná rychlost V_0 jest jen o 10 m/sek větší než byla v příkladě předešlém a blíží se již značně rychlosti 11.189 km/sek, při níž se střela na své přímé („svislé“) dráze vzdaluje do nekonečna.

Za jakou dobu dospěje uvažovaná střela do nejvzdálenějšího bodu své dráhy?

K výpočtu použijeme vzorce 21' (viz příklad 5), v němž dosadíme D za R. Dostaneme

$$t = D \cdot \left[\frac{V_0}{2 g_0 R_0} + \sqrt{\frac{D}{2\mu}} \cdot \arctg V_0 \cdot \sqrt{\frac{D}{2\mu}} \right]$$

čili

$$t = 384390 \cdot \left[\frac{11.096}{125.19} + \frac{1}{\sqrt{2.077}} \arctg \frac{11.096}{\sqrt{2.077}} \right]$$

Označme-li zase $u = \frac{11.096}{\sqrt{2.077}}$; $\arctg u = \alpha$, pak jest $\tg \alpha = u$; $\lg \tg \alpha =$

$$\lg u = 0.88646. \text{ Tedy } \alpha^0 = 82^0 36' = 4956'; \alpha = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4956}{5400}; \frac{1}{\sqrt{2.077}} \cdot \alpha =$$

1.00325. Tak obdržíme

$$t = 384390 \cdot [0.08864 + 1.00325] = 419710 \text{ sek.},$$

čili $t = 4$ dny 20 hodin 35 minut 10 sekund.

Příklad 7.: Jakou počátečnou rychlostí V_0 by bylo třeba vrhnouti střelu s měsíce v prodloužení měsíčního poloměru, aby dospěla do vzdálenosti $D - X_1 = 38720$ km od měsíčního středu, v této vzdálenosti se zastavila a pak padala zpět na měsíc?

Opět jest (vzorec 3, $A = 0$) $V_0 = \sqrt{2 g_0 R_0 - \frac{2\mu}{D - X_1}}$. Pro měsíc jest (viz příklady 3, 4) $2 g_0 R_0 = 5.7566$, $\mu = 5010.5$, tedy vypočteme $\frac{2\mu}{D - X_1} = 0.2588$

$$V_0 = \sqrt{5.7566 - 0.2588} = 2.345 \text{ km/sek.}$$

Jak patrně, jest tato počátečná rychlost již značně blízko rychlosti 2.3993 km/sek vypočtené v příkladě 4 pro nekonečnou dráhu střely.

Jaké doby potřebuje střela vržená s počátečnou rychlostí $V_0 = 2.345$ km/sek s měsíce (za výše uvedených dalších podmínek), aby dospěla do nejvzdálenějšího bodu své dráhy?

Použijeme opět vzorce 21', do něhož dosadíme za $R = D - X_1 = 38720$, resp. za V_0 , $2g_0 R_0$, $\frac{2\mu}{D - X_1}$ již známé hodnoty, takže obdržíme

$$t = 38720 \cdot \left[\frac{2 \cdot 345}{5 \cdot 7566} + \frac{1}{\sqrt{0 \cdot 2588}} \cdot \arctg \frac{2 \cdot 345}{\sqrt{0 \cdot 2588}} \right].$$

Zase označíme $\frac{2 \cdot 345}{\sqrt{0 \cdot 2588}} = u = \operatorname{tg} z$; $\lg \operatorname{tg} z = \lg u = 0 \cdot 66366$; $z^0 = 77^\circ 45' 36''$ čili $z'' = 279936''$, $z = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{279936}{324000}$; $\frac{z}{\sqrt{0 \cdot 2588}} = 2 \cdot 6677$. Tedy jest

$$t = 38720 \cdot [0 \cdot 40737 + 2 \cdot 6677] = 119070 \text{ sek.}$$

čili $t = 1$ den 9 hodin 4 minuty 30 vteřin.

Příklad 8.: Střela byla vržena se země svisle vzhůru počátečnou rychlostí $V_0 = 11 \cdot 117$ km/sek.

a) *V jaké vzdálenosti od středu zemského se zastaví?*

Ve hledané vzdálenosti R bude tedy rychlost střely $v = 0$. Do vzorce 22 dosadíme za $2g_0 R_0 = 125 \cdot 19$, $V_0^2 = 123 \cdot 58$, $R_0 = 6377 \cdot 4$ km, $a = 2g_0 R_0 - V_0^2 = 1 \cdot 61$. Obdržíme pak $R = 495890$ km.

b) *Jaké doby potřebovala by střela k uražení této dráhy $R - R_0$?*

Hledanou dobu vypočteme ze vzorce 21'.

Najdeme, že jest $\frac{V_0}{2g_0 R_0} = 0 \cdot 0888$, $\lg \sqrt{\frac{R}{2\mu}} = 1 \cdot 89658$; $\lg V_0 \sqrt{\frac{R}{2\mu}} = 0 \cdot 94256 = \lg \operatorname{tg} (83^\circ 29' 18'') = \lg \operatorname{tg} 300558''$; $\lg \arctg V_0 \sqrt{\frac{R}{2\mu}} = 0 \cdot 16350$; $\sqrt{\frac{R}{2\mu}} \arctg V_0 \sqrt{\frac{R}{2\mu}} = 1 \cdot 1484$. Jest tedy $t = 495890 \cdot [0 \cdot 0888 + 1 \cdot 1484]$, čili $t = 613510$ sek. = 7 d 2 h 5 m 10 sek.

c) *Jakou rychlost bude mít tato střela ve vzdálenosti $X_1 = 345670$ km od středu zemského?* Rychlost tuto vypočteme podle vzorce 19, dosadíme-li do něho X_1 za R . Jest $v = \sqrt{\frac{2\mu}{X_1} - a} = \sqrt{2 \cdot 3097 - 1 \cdot 61} = 0 \cdot 8365$ km/sek.

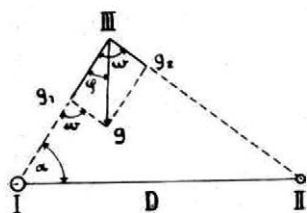
d) *Za jakou dobu dospěje uvažovaná střela do vzdálenosti $X_1 = 345670$ km od středu zemského?* Hledanou dobu t vypočteme na př. ze vzorce 18'. Najdeme, že jest $\lg \frac{2\mu}{a} = 5 \cdot 69538$; $\frac{V_0}{V_0^2 + a} = 0 \cdot 0888$; $\frac{v}{v^2 + a} = 0 \cdot 36216$. Označme $\arctg \frac{V_0}{\sqrt{a}} = z_0$, $\arctg \frac{v}{\sqrt{a}} = z$. Pak jest $\lg \operatorname{tg} z_0 = \lg \frac{V_0}{\sqrt{a}} = 0 \cdot 94256$, $\lg \operatorname{tg} z = \lg \frac{v}{\sqrt{a}} = 1 \cdot 81903$, tedy $z_0^0 = 83^\circ 29' 20'' = 300560''$, $\arctg z_0 = 1 \cdot 4571$, $z^0 = 33^\circ 23' 40'' = 120220''$, $\arctg z = 0 \cdot 58283$.

Jest tedy $\arctg \frac{V_0}{\sqrt{a}} - \arctg \frac{v}{\sqrt{a}} = 1 \cdot 4571 - 0 \cdot 58283 = 0 \cdot 87427$

$\frac{1}{\sqrt{a}} (\arctg \frac{V_0}{\sqrt{a}} - \arctg \frac{v}{\sqrt{a}}) = 0 \cdot 6890$; $t = \frac{2\mu}{a} [0 \cdot 0888 - 0 \cdot 36216 + 0 \cdot 6890] =$

$\frac{2\pi}{a} \cdot 0.41564$, odkudž ihned obdržíme $t = 206110 \text{ sek} = 2 \text{ dny } 9 \text{ hodin } 15 \text{ minut } 10 \text{ vteřin}$.

O gravitačním poli dvou hvězd, jichž vzdálenost se nemění.



Obr.2.

Vrcholy I, II trojúhelníka zobrazeného ve vedlejším obr. 2. představují gravitační centra dvou hvězd.

Intensita gravitačního pole hvězdy I v bodě III jest g_1 . Intensita gravitačního pole hvězdy II v bodě III jest g_2 . Bod III je od bodů I, II ve vzdálenostech R_1 , R_2 . Vzdálenosti tyto svírají ve vrcholu III úhel ω . Výslednou intensitu g gravitačního pole obou hvězd I, II v bodě III obdržíme vektorovým součtem. Podle věty kosinové jest

$$g = \sqrt{g_1^2 + g_2^2 + 2 g_1 g_2 \cos \omega} \quad (27)$$

Vektor g svírá s vektorem g_1 úhel φ . Podle věty sinové jest

$$\sin \varphi = \frac{g_2}{g} \cdot \sin \omega.$$

Z $\triangle I, II, III$ pak platí podle věty sinové

$$\sin \omega = \frac{D}{R_2} \cdot \sin z,$$

kdež značí $D = I II$ = vzdálenost gravitačních středů obou uvažovaných hvězd, z = úhel sevřený vzdálenostmi R_1 , D .

Jest tedy

$$\sin \varphi = \frac{g_2}{R_2} \cdot \frac{D}{g} \cdot \sin z. \quad (28)$$

Podle zákona Newtonova platí

$$g_1 = \frac{\mu_1}{R_1^2}, g_2 = \frac{\mu_2}{R_2^2}, \quad (29)$$

kdež veličiny μ_1 , μ_2 jsou konstanty (viz 1) uvažovaných hvězd.

Z $\triangle I II III$ podle kosinové věty jest

$$\cos \omega = \frac{R_1^2 + R_2^2 - D^2}{2 R_1 R_2} \quad (30)$$

Dosadíme-li tedy z rovnice 29, 30 za g_1 , g_2 , $\cos \omega$ do rovnice 27, obdržíme

$$g = \sqrt{\frac{\mu_1^2}{R_1^4} + \frac{\mu_2^2}{R_2^4} + \frac{\mu_1 \mu_2 (R_1^2 + R_2^2 - D^2)}{R_1^3 R_2^3}} \quad (31)$$

Abychom si vyjádřili výsledné gravitační přirychlení g co funkci polárních souřadnic R_1 , z (v rovině trojúhelníka I, II, III, kde pólem jest grav. střed I), postačí, dosadíme-li do rovnice 31 za R_2 výraz

$$R_2 = \sqrt{R_1^2 + D^2 - 2 D R_1 \cos z}, \quad (30)$$

jež obdržíme pomocí kosinové věty z trojúhelníka I, II, III. Dostaneme pak

$$g = \sqrt{\frac{\mu_1^2}{R_1^4} + \frac{\mu_2^2}{[R_1^2 + D^2 - 2 D R_1 \cos z]^2} + \frac{2 \mu_1 \mu_2 (R_1 - D \cos z)}{R_1^2 \cdot [R_1^2 + D^2 - 2 D R_1 \cos z]^3}} \quad (32)$$

Výraz tento představuje v polárních souřadnicích R_1, α rovnici křivky, jež jest geometrickým místem bodů, v nichž jest stejné výsledné gravitační přirychlení g . V prostoru jest tímto geometrickým místem rotační plocha, jež vznikne otočením právě zmíněné křivky okolo rotační osy $D = I \text{ II}$.

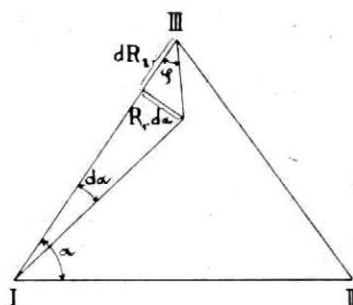
Učiníme-li bod I počátkem souřadnic; takže bude $x = I, II, y =$ kolmice v bodě I na osu x , pak jest

$$R_1^2 = x^2 + y^2; R_2^2 = (D - x)^2 + y^2.$$

Dosadíme-li tyto hodnoty za R_1^2, R_2^2 do rovnice 31, obdržíme po úpravě rovnici uvažovaného geometrického místa stejné intensity g ve zvoleném souřadném systému x, y :

$$g^2 \cdot [x^2 + y^2]^2 \cdot [(D - x)^2 + y^2]^2 = \mu_1^2 \cdot [(D - x)^2 + y^2]^2 + \mu_2^2 \cdot [x^2 + y^2]^2 + 2 \mu_1 \mu_2 (x^2 + y^2 - Dx) \sqrt{[x^2 + y^2] \cdot [(D - x)^2 + y^2]}$$

Rovnice tato, jak patrně, je v proměnných x, y šestnáctého stupně.



Částice hmotná, jež by byla v bodě III v klidu vzhledem ku tělesům I, II, počla by se vlivem výsledného gravitačního přirychlení g pohybovati ve směru vektoru g . Jakmile by však opustila bod III a její polární souřadnice by se změnily o dz, dR_1 , změnily by se též velikost i směr výsledného přirychlení g .

Z vedlejšího obr. 3. je patrné, že mezi diferenciály dR_1, dz platí vztah

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R_1 dz}{dR_1}.$$

Obr. 3.

Jest tedy

$$\frac{dR_1}{dz} = R_1 \cdot \operatorname{cotg} \varphi = R_1 \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \varphi}{\sin^2 \varphi}} \dots \dots \dots (33)$$

Dosadíme-li nyní do této rovnice 33 za $\sin \varphi$ z rovnice 28, obdržíme po úpravě

$$\frac{dR_1}{dz} = R_1 \sqrt{\frac{R_2^2 g^2}{g_2^2 D^2 \sin^2 \alpha} - 1}$$

Dalším dosazením za $g_2 = \frac{\mu_2}{R_2^2}$ a použitím rovnic 30', 32 obdržíme

v polárních souřadnicích R_1, α diferenciální rovnici silokřivek gravitačního pole uvažovaných dvou nebeských těles.

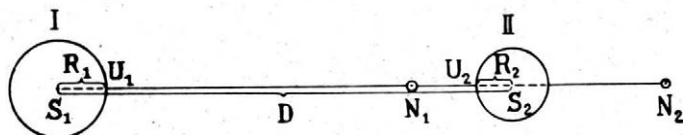
Ze vzorce 28 jest patrné, že jest $\varphi = 0$, když je $\alpha = 0$.

Jednou silokřivkou je tedy též spojnice gravitačních středů I, II.

Přímý vrh na spojnici gravitačních středů dvou hvězd, jichž vzdálenost se nemění.

Uvažujme dvě kulová tělesa nebeská I, II, jichž gravitační centra jsou ve vzdálenosti D , jež se nemění. Poloměr tělesa I označme R_1 , poloměr tělesa II označme R_2 . Gravitační středy obou těles označme S_1 , resp. S_2 . Přímka středná $S_1 S_2$ nechť protíná povrchy

obou uvažovaných hvězd v bodech U_1 resp. U_2 , ležících mezi středy S_1, S_2 .



Obr. 4.

V bodě U_1 na tělese I myslíme si ústí děla, z něhož je vržena střela směrem k bodu U_2 na tělese II. Předpokládáme, že na tuto střelu během jejího pohybu nepůsobí žádné jiné síly kromě gravitačních sil obou daných hvězd I, II.

Proměnnou intensitu gravitačního pole hvězdy I v libovolném bodě přímky $S_1 S_2$ označme jako dříve g_1 , podobně intensitu gravitačního pole hvězdy II v libovolném bodě přímky $S_1 S_2$ označme g_2 .

Na povrchu hvězdy I v bodě U_1 , tedy ve vzdálenosti R_1 od jejího gravitačního středu S_1 má intensita g_1 hodnotu g_1' , intensita g_2 hodnotu g_2' .

Na povrchu hvězdy II v bodě U_2 ($U_2 S_2 = R_2$) má intensita gravitačního pole hvězdy I hodnota g_1'' , intensita gravitačního pole hvězdy II hodnota g_2'' .

Střed S_1 zvolme počátkem, od něhož jde kladný směr osy x směrem $\overrightarrow{S_1 S_2}$. Podle Newtonova zákona o gravitaci platí úměry:

$$g_1' : g_1 : g_1'' = \frac{1}{R_1^2} : \frac{1}{x^2} : \frac{1}{(D - R_2)^2}$$

$$g_2' : g_2 : g_2'' = \frac{1}{(D - R_1)^2} : \frac{1}{(D - x)^2} : \frac{1}{R_2^2}$$

Z úměr těchto ihned plynou rovnice

$$g_1' \cdot R_1^2 = g_1 x^2 = g_1'' \cdot (D - R_2)^2 = \mu_1 \dots \dots \dots (34)$$

$$g_2' \cdot (D - R_1)^2 = g_2 \cdot (D - x)^2 = g_2'' \cdot R_2^2 = \mu_2 \dots \dots \dots (35)$$

v nichž jsou μ_1, μ_2 konstanty příslušné daným hvězdám.

Na střelu, jež se pohybuje po úsečce $\overline{U_1 U_2}$ působí tedy výsledné gravitační přirychlení

$$g = g_1 - g_2 = \frac{\mu_1}{x^2} - \frac{\mu_2}{(D - x)^2} \dots \dots \dots (36)$$

O průběhu výsledného gravitačního přirychlení g na přímce $\overline{S_1 S_2}$.

Výsledná intensita g jest dána rovnicí 36 tehdy, je-li střela na úsečce $\overline{U_1 U_2}$. V koncových bodech U_1, U_2 této úsečky má výsledné gravitační přirychlení g hodnoty:

$$\left. \begin{aligned} \text{V bodě } U_1 \dots g' &= g_1' - g_2' = \frac{\mu_1}{R_1^2} - \frac{\mu_2}{(D - R_1)^2}, \\ \text{v bodě } U_2 \dots g'' &= g_1'' - g_2'' = \frac{\mu_1}{(D - R_2)^2} - \frac{\mu_2}{R_2^2}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (37)$$

Vniká-li však uvažovaná střela v jednom z obou koncových bodů U_1 , U_2 do hvězdy, na níž bod onen leží, pak přirozeně proti tomuto pohybu počne působiti odpor. Vedle toho gravitační zákon Newtonův v nitru hvězdy již není vyjádřen rovnicemi 34, 35.

Podle obr. 4. v bodě ležícím na přímce $S_1 S_2$, avšak v levo od hvězdy I by výsledné gravitační přirychlení bylo dáno rovnicí $g = -g_1 - g_2$; podobně v bodě ležícím sice na přímce $S_1 S_2$, avšak na pravo (obr. 4.) od hvězdy II by platila rovnice $g = g_1 + g_2$. Studujeme průběh výsledného gravitačního přirychlení $g = g_1 - g_2$ na úsečce $U_1 U_2$ v závislosti na x .

Z rovnice 36 plyne ihned, že toto výsledné gravitační přirychlení nabude hodnoty nulové, je-li $g_1 = g_2$, čili

$$\frac{\mu_1}{x^2} = \frac{\mu_2}{(D-x)^2} \quad \dots \quad (38)$$

Z této rovnice vypočteme vzdálenost x , pro niž jest $g = 0$.

Rovnice 38 jest identická s rovnicí

$$x^2(\mu_1 - \mu_2) - 2\mu_1 D \cdot x + \mu_1 D^2 = 0 \quad \dots \quad (38)$$

jejíž kořeny jsou

$$X_1 = D \cdot \frac{\mu_1 - \sqrt{\mu_1 \mu_2}}{\mu_1 - \mu_2} = D \sqrt{\mu_1} \cdot \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\mu_1 - \mu_2}, \quad \dots \quad (39)$$

čili

$$X_1 = \frac{D\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}; \quad \dots \quad (39')$$

resp.

$$X_2 = D \cdot \frac{\mu_1 + \sqrt{\mu_1 \mu_2}}{\mu_1 - \mu_2} = D \sqrt{\mu_1} \frac{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}{\mu_1 - \mu_2} \quad \dots \quad (40)$$

čili

$$X_2 = \frac{D\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}} \quad \dots \quad (40')$$

Dále jest

$$X_1 - D = D \cdot \frac{\mu_2 - \sqrt{\mu_1 \mu_2}}{\mu_1 - \mu_2} = D \cdot \sqrt{\mu_2} \cdot \frac{\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}}{\mu_1 - \mu_2} = -\frac{D \cdot \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} \quad (41)$$

$$X_2 - D = D \cdot \frac{\mu_2 + \sqrt{\mu_1 \mu_2}}{\mu_1 - \mu_2} = D \cdot \sqrt{\mu_2} \cdot \frac{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}{\mu_1 - \mu_2} = \frac{D\sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}} \quad (42)$$

Vypočteme poměry $X_1 : X_2$, $(X_1 - D) : (X_2 - D)$. Obdržíme

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}, \quad \frac{X_1 - D}{X_2 - D} = \frac{\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} = -\frac{X_1}{X_2}.$$

Odtud plyne dvojpoměr

$$\frac{X_1}{X_2} : \frac{X_1 - D}{X_2 - D} = -1 \quad \dots \quad (43)$$

Označme písmenami N_1 , N_2 oba body na ose $x \equiv S_1 S_2$, jimž přísluší úsečky X_1 , resp. X_2 . Tyto body tvoří spolu s gravitačními centry S_1 , S_2 harmonickou čtveřinu bodů. Jak jest patrné z rovnice 39', jest kořen X_1 vždy kladný a menší než vzdálenost středů $S_1 S_2 = D$, ať jsou veličiny D , μ_1 , μ_2 jakkoliv velké nebo malé. (Velikost veličin D , μ_1 , μ_2 může býti v mezích $0 \leq D \leq \infty$, $0 \leq \mu_1 \leq \infty$, $0 \leq \mu_2 \leq \infty$.)

Předpokládejme, že jest $D > R_1 + R_2$, t. j. že obě hvězdy jsou od sebe tak vzdáleny, že se ani nepronikají, ani nedotýkají.

Bod N , leží na úsečce $\overline{U_1 U_2}$, jejíž velikost jest $\overline{U_1 U_2} = D - R_1 - R_2$, je-li

$$D - R_2 \geq X_1 \geq R_1 \dots \dots \dots (44)$$

Bod N_1 se stotožní s bodem U_1 (viz 37), je-li $g' = 0$, t. j. $g_1' = g_2'$, čili (podle rovnic 34, 35) když jest $\mu_1 (D - R_1)^2 = \mu_2 \cdot R_1^2$, nebo $g_1' \cdot (D - R_1)^2 = g_2'' \cdot R_2^2$. Bod N_1 se stotožní s bodem U_2 , je-li $g_1'' = g_2''$, t. j. když $R_1 \sqrt{g_1'} = (D - R_2) \sqrt{g_2''}$.

Je-li $X_1 < R_1$, nebo $X_1 > D - R_2$, pak ovšem bod N_1 neleží na úsečce $\overline{U_1 U_2}$, leží uvnitř hvězdy I, po př. hvězdy II. V tomto případě by intensita gravitačního přirychlení jedné hvězdy v nejbližším bodě hvězdy druhé byla tak mocná, že by přemáhala tam gravitační sílu oné slabší hvězdy na jejím vlastním povrchu. Následek toho by byl, že by se v oněch místech povrchu „slabší“ hvězdy odstěpovala od ní její vlastní hmota nevázaná soudržností a přitahována jsouc hvězdou silnější, „padala by na ni“.

Rovnici 39' možno též psáti ve tvaru

$$X_1 = \frac{D}{2} \cdot \frac{2 \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} \dots \dots \dots (39'')$$

z něhož jest ihned patrné, že jest $X_1 \geq \frac{D}{2}$, je-li $\mu_1 \geq \mu_2$.

Budiž $\mu_1 > \mu_2$. Pak jest podle rovnice 40' též X_2 kladné. Současně vidíme z poslední rovnice 42, že jest též $X_2 - D > 0$, t. j. $X_2 > D$.

Je-li $\mu_1 = \mu_2$, jest $X_1 = \frac{D}{2}$, $X_2 = \infty$, jak jest patrné z rovnic 39', 40'.

Je-li $\mu_1 < \mu_2$, jest $X_1 < \frac{D}{2}$, $X_2 < 0$, t. j. bod N_2 leží na levo od středu S_1 (obr 4.).

Ať jest poměr veličin μ_1, μ_2 jakýkoliv, leží bod N_2 vždy mimo úsečku $\overline{U_1 U_2}$, nemá pro nás tedy fyzikálního významu. Význam kořene X_2 však ještě poznáme později.

Derivováním rovnice 36 obdržíme

$$\frac{dg}{dx} = -2 \cdot \left[\frac{\mu_1}{x^3} + \frac{\mu_2}{(D-x)^3} \right] \dots \dots \dots (45)$$

Z tohoto vzorce jest patrné, že podél úsečky $\overline{U_1 U_2}$ výsledné gravitační přirychlení $g = \frac{\mu_1}{x^2} - \frac{\mu_2}{(D-x)^2}$ s rostoucím x stále klesá od počátečné své hodnoty g' až k hodnotě g'' (viz 37), poněvadž derivace $\frac{dg}{dx}$ jest stále záporná.

Dalším derivováním obdržíme

$$\begin{aligned} \frac{d^2 g}{dx^2} &= 6 \cdot \left[\frac{\mu_1}{x^4} - \frac{\mu_2}{(D-x)^4} \right], \\ \frac{d^3 g}{dx^3} &= -24 \cdot \left[\frac{\mu_1}{x^5} + \frac{\mu_2}{(D-x)^5} \right]. \end{aligned}$$

Křivka, jež znázorňuje pokles výsledného přirychlení g v mezích intervalu $R_1 \leq x \leq D - R_2$, má tudíž inflexní bod, v němž jest

$$\frac{d^2 g}{dx^2} = 0; \quad \frac{d^3 g}{dx^3} < 0.$$

Z podmínky inflexe $\frac{d^2 g}{dx^2} = 0$ plyne ihned

$$\frac{\mu_1}{x^4} = \frac{\mu_2}{(D-x)^4}$$

čili

$$\frac{x}{D-x} = \sqrt[4]{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \dots \dots \dots (46)$$

Ze čtyř kořenů rovnice 46 jsou dva imaginární a ze zbývajících dvou reálných jest jeden záporný, jeden kladný. Pro nás má význam jen tento kladný kořen, jelikož leží v intervalu $0 < x < D$, jak dále uvidíme. Proň platí

$$X_i = \frac{D \cdot \sqrt[4]{\mu_1}}{\sqrt[4]{\mu_1} + \sqrt[4]{\mu_2}}, \dots \dots \dots (46')$$

kdež $\sqrt[4]{\mu_1}$, $\sqrt[4]{\mu_2}$ značí kladné reálné kořeny.

Stanovme rozdíl délek $X_1 - X_i$. Použijeme-li rovnic 39', 46' obdržíme

$$X_1 - X_i = D \cdot \left[\frac{\sqrt[4]{\mu_1}}{\sqrt[4]{\mu_1} + \sqrt[4]{\mu_2}} - \frac{\sqrt[4]{\mu_1}}{\sqrt[4]{\mu_1} + \sqrt[4]{\mu_2}} \right] = D \frac{\sqrt[4]{\mu_1 \mu_2}}{\mu_1 - \mu_2} \cdot [\sqrt[4]{\mu_1} - 2\sqrt[4]{\mu_1 \mu_2} + \sqrt[4]{\mu_2}]$$

čili

$$X_1 - X_i = D \frac{\sqrt[4]{\mu_1 \mu_2}}{\mu_1 - \mu_2} \cdot [\sqrt[4]{\mu_1} - \sqrt[4]{\mu_2}]^2$$

Z výrazu tohoto jest zřejmo, že jest $X_1 > X_i$, je-li $\mu_1 > \mu_2$. Je-li

$\mu_1 = \mu_2$, jest $X_i = \frac{D}{2} = X_1$, jak jest patrné ze vzorců 39', 46'. Je-li

$\mu_1 < \mu_2$, jest $X_1 < X_i$.

Vzorec 46' můžeme též psát ve tvaru

$$X_i = \frac{D}{2} \cdot \frac{\sqrt[4]{\mu_1} + \sqrt[4]{\mu_2}}{\sqrt[4]{\mu_1} + \sqrt[4]{\mu_2}}$$

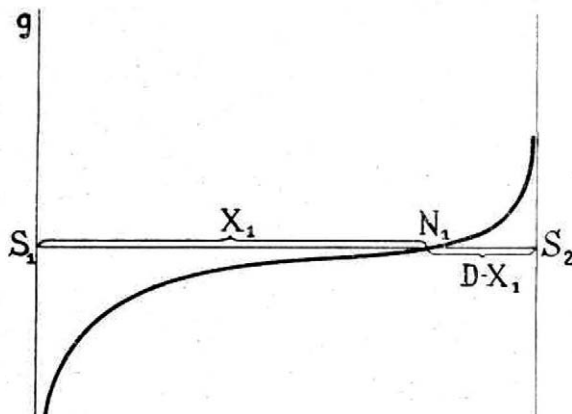
ze kteréhož způsobu psaní jest ihned patrné:

$$X_i > \frac{D}{2}, \text{ je-li } \mu_1 > \mu_2,$$

$$X_i < \frac{D}{2}, \text{ je-li } \mu_1 < \mu_2.$$

Průběh velikosti výsledného gravitačního přirychlení g v závislosti na x znázorňuje graficky obr. 5.

Příklad 9.: Je-li hvězdou I země, hvězdou II měsíc, jest (střední vzdálenost země a měsíce) $D = 384390$ km (viz příklad 1), $\sqrt[4]{\mu_1} = \sqrt[4]{408490} =$



Obr. 5.

631·81, $\sqrt{\mu_2} = \sqrt{5010 \cdot 5} = 70 \cdot 785$ (viz příklad 4), tedy podle vzorce 39' jest $X_1 = 345670$ km. S touto vzdáleností X_1 bylo též počítáno v předešlých příkladech 1, 2, 4, 5, 7.

Podle vzorce 40' pak jest $X_2 = 432890$ km.

Stanovme vzdálenost X_i . Vypočteme $\sqrt[4]{\mu_1} = 25 \cdot 136$; $\sqrt[4]{\mu_2} = 8 \cdot 413$. Dosaďme-li tyto hodnoty do vzorce 46', obdržíme $X_i = 287990$ km.

Srovnáme-li vzdálenosti X_i , X_1 zde vypočtené, vidíme, že skutečně jest $X_1 > X_i$, jak má být, poněvadž jest $\mu_1 > \mu_2$.

(Příště dále.)

VOJENSTVÍ DOMA A V CIZINĚ.

Škola pro výcvik vojenských psů v Kostelci nad Orlicí.

Již několik našich výchovných ústavů vojenských zakončilo první období své činnosti a dalo armádě k dispozici první výsledky své práce. Dne 30. listopadu m. r. se připojila k těmto ústavům „Škola pro výcvik vojenských psů v Kostelci nad Orlicí“.

Zmíním se nejprve a to jen stručně o historii této školy. V roce 1920 byl ppl. Jirsa, mající již zkušenosti z Ruska a ze Sibíře ve výchově psů pro vojenskou potřebu, pověřen, aby zřídil ústav, kde by se jednak chovali a jednak cvičili psi v armádě potřební. Tím bylo vlastně již zásadně rozhodnuto o zavedení psa v armádě.

Pro školu byl vyhlédnut Kostelec nad Orlicí. Za vzácné podpory správy města zřízen byl psinec a v barákové budově místnosti školní. R. 1921 byl opatřen potřebný počet psů chovných, aby byl zajištěn dorost pro výcvik v roce 1922. Přípravné práce se děly za velikých potíží. Velitel školy, ač neměl dostatek mužstva, přece provedl úsporně velikou část prací ve vlastní režii; tím více proto překvapí účelnost a vzorné zařízení celého ústavu. Metlou ústavu byla letos nemoc psinka, již psi školní nebyli ušetřeni, a která zanechala své stopy jak v tělesném vývoji psů, tak i ve výcviku. Dnes má škola vedle chovných psů dostatečný počet štěňat, která přijdou do výcviku příštího roku. Škola chová