

Problém výstřelu s planety na planetu.

Za mých chlapeckých let bývaly výkladní skříně knihkupců plny románů Julia Vernea. V naší žákovské knihovně a ve veřejné knihovniče naši vsi byly knihy tohoto u mládeže slavného autora skoro stále rozpůjčeny.

Od doby, kdy Jules Verne psal své romány, uteklo jen několik desítek let a kolik z jeho odvážných fantasí se v té krátké době uskutečnilo? Ať třeba v jiné podobě, než ji byla stvořila směle tušící a koncipující Verneova představa, však přece byly uskutečněny. Za války podmořské čluny pluly po širém oceánu, německá dalekonošná děla střílela na Paříž do dálky 140 kilometrů. Nedávno Portugalci přeletěli Atlantický oceán, italská letadla letěla z Říma do Tokia, Angličan Blake z Londýna do Kalkuty. Verneovy romány tak ztrácejí půvab nedosažitelného, skutečnost je dostihuje. Jules Verne napsal též knihu „Do měsíce“, jejíž obsah je asi takovýto: Veliký projektil, v jehož nitru jest několik odvážlivců, jest vystřelen z obrovského děla velikou počátečnou rychlostí se země na měsíc. Hle, přece jedna Verneova fantasie, o jejíž uskutečnění se lidé dosud nepokusili.

Ještě smělejším mistrem vědecké fantasie jest Angličan H. G. Wells. V jednom Wellsově románě vedou proti sobě válku dva světy, dvě planety. Bojištěm jest „bohužel“ naše země, na niž dopadly střely, jež byly vrženy s Marta. Wells ukryl v těchto střelách prapodivné obyvatele oné naší bratrské planety, kteří však vykonali svou dlouhou pout' vesmírem s Marta na zemi s nebratrskými úmysly vůči nám, ubohým a nedokonalým obyvatelům zemským. Hubí lidstvo asi tak, jako toto lidstvo hubilo rozplemeněné potkany.

Knihy Verneovy a Wellsovy jsou čteny všemi vzdělanými národy. Zasluhují toho, poněvadž vskutku dovedou napínatí zvědavost a překvapovati. Nejsem literárním kritikem, tedy bych neměl psát o kouzlu Wellsových nebo Verneových románů. Necht' mi však povolání kněží tohoto černého umění prominou, že se ještě jen na chvilku vpletu do jejich řemesla.

Do zbrojnice románových efektů patří tajemství a závoje, jež je zakrývají a dávají zato tím více tušiti, nechávající naší představivosti dosti volného pole k uhadování a spolutvoření bez námah a zlostí, jež bývají spojeny s námahou. Román pak má možnost vzrušovati bohatstvím všemožných překvapení a dojmů, jež neočekávaně skytá.

Tolika možností ovšem nemá „chudá věda“ a suchá, tvrdá a klopotná práce. Je však na světě ještě též jiná radost, než snadné radosti vzrušené fantasie. Jest v úsilovném a pracném hledání pravdy, spojeném vždy s námahou, bez níž — podle polopravdivého přísloví

— prý nikdo nejí koláče. Tato druhá radost je vlastní vzpruhou pokroku lidstva a nervem jeho života a vzestupu. Pociťuje ji dělník vědy, jenž láme nové problémy a tak otvírá lidstvu nové oblasti světa ku poznání, pociťuje ji technik, jenž tvrdým úsilím uskutečňuje své představy, pociťuje ji každý, kdo hledá a nachází, kdo pracuje.

Romány Wellsovy a Verneovy jsou do jisté míry „koláče bez práce“. Potrava kouzelná. Fantasie nezná překážek a nepotřebuje námahy, potu a času na jejich zdolání. Přeskakuje je lehce. Nepotřebuje zbraní k ražení cest a k dobývání.

Jednou z těchto zbraní, onou nejostřejší, jež prvá jako ostrý nebozez láme a proráží cestu, jest matematika. Kolik lidí by znuděně sklaplo smělý „vědecký román“, kdyby na jeho stránkách shlédli značky matematiky, vysvětlující a dokazující na těch místech, kde jinak autor jen snadno vymýšlí. Čím je tato studená matematika, kterou ke všemu ještě nutno dříve umět a být při ní velmi trpělivý, proti opiu fantasie, jež z člověka tak snadno udělá boha, neznajícího překážek?

Daleko za fantasií kulhá a bije se člověk, myslící jen svým chladným rozumem a tak pracně probíjející překážky svých cest. Avšak ve společenství stejného rozumu a jeho poznání je protiklad snivého jedince: myslící lidstvo. Sice zvolna, však pevně kámen na kameni vzpurně stavi babylonskou věž svého panství nad světem.

Když dočtete Wellsův nebo Verneův román, nebo třeba Kellermannův „Tunel“, řeknete: bylo to hezké, smělé, ale je to jen fantasie, není to pravda.

Oproti tomu je pravdou letadlo, podmořský člun, dalekonosné dílo, jež střílelo na dostřel 140 km, tunel pod Labem, spojující jeho oba břehy v Hamburku.

Pravdou je též, co hledám a podávám laskavému čtenáři v tomto článku o problému výstřelu s hvězdy na hvězdu.

Přišly mi tyto myšlenky, když jsem řešil právě zmíněný problém, bezradně stál před jeho (pro mne) nepřekonatelnými obtížemi, poznával slabost svého lidského rozumu před jeho obecnou neřešitelností a při tom vzpomněl jsem si na snadné kouzlo Wellsových a Verneových knih.

A přece věřím, že jednou bude podáno řešení v plné obecnosti. Mně se zdařilo vyřešit z něho jen některé zvláštní a zjednodušené případy, jež trpělivý čtenář najde v dalších odstavcích tohoto pojednání.

Svádí mne to říci, že se domnívám, že někdy v budoucnu lidstva budou uskutečněny též Verneovy sny o výstřelu se země na měsíc, nebo Wellsova fantasie o střelách vržených se země na Mars (nebo naopak). Mohl bych toto své domnění dokonce opírat o jednoduchý výpočet trojčlenkou:

Střela vržená se země počátečnou rychlostí větší než 11180 m/sek. do vzduchoprázdného vesmíru, nevrátila by se již nikdy k zemi zpět. Ovšem, aby tato střela překonala odpor vzduchu obklopujícího zemi, musila by její počátečná rychlost býti větší.

Vzpomeňme nyní, že před zavedením moderních prachů nitrocelluloseových a nitroglycerinových byla s černými prachy docílena největší počátečná rychlost střel jen asi 530 m/sek. Avšak ani ne po třiceti letech po té době stříleli r. 1918 Němci na Paříž střely s počáteční rychlostí již asi 1600 m/sek., tedy asi trojnásobnou.

„Kdyby“ tempo tohoto pokroku potrvalo, mohli bychom očekávat v době poměrně nedlouhé dosažení tak velkých počátečních rychlostí, jakých by asi bylo zapotřebí pro střelbu se země na její nejbližší planety, po př. na měsíc.

Nechci uvažovati o „užitečnosti takovýchto počínání“. Nebo o „nebezpečnostech, jež by byla spojena s tímto střelením“. Úvahy takové by byly trochu předčasné. Představme si však, že by se kdy uskutečnil Wellsův nápad aspoň potud, že by na naší zemi dopadly střely, jež by nám daly neklamné svědectví o existenci inteligentních bytostí na některé jiné hvězdě. Okamžik tento by byl aspoň tak dějinným, jako byl onen okamžik, v němž Kolumbovi námořníci spatřili břehy Nového Světa.

Obyvatelé měsíce — jsou-li — měli by při tomto „dorozumívání se se zemí“ snazší úkol než my, lidé na zemi. Jak dále vypočteme, stačilo by jim vystřeliti pana Broučka jen poměrně malou počátečnou rychlostí 2300 m/sek., aby jej vrátili zpět na zeměkouli, odkud jim jej Svatopluk Čech dobré paměti byl poslal.

Můžeme též skoro bezpečně soudit, že na měsíci nejsou Němci. Kdyby tam byli, jistě by nás o své existenci již uvědomili střelami se značkami „Made in Germany-Mond“.

I obyvatelům Marta by bylo snazší vrhati střely do vesmíru a vésti meziplanetární války, než nám pozemšťanům a to proto, že Mars je menší než země, takže na něm postačí značně menší počátečné rychlosti střel.

Však všechny tyto myšlenky jsou zatím ještě nečasové. Zanechme jich a vraťme se k věci tohoto článku, k pokusu o matematické řešení problému střelby s hvězdy na hvězdu. Vyznávám napřed, že se mi zdařilo řešení jen poměrně nepatrné části celého problému.

Ve velmi pečlivě a srozumitelně psané knize Kozákově*) podává autor v dodatku pojednání „Šikmý vrh ve vakuu jako pohyb centrální“, velmi pěkně zpracované na základě článku Dr. E. Lampe.***) Předmětem tohoto pojednání jest pohyb střely v gravitačním poli konvergentním a proměnném podle zákona Newtonova (speciálně v gravitačním poli země) a ve vakuu.

Pojednání nevyčerpává celé látky problému, ponechává ještě mnoho otázek nedotčených. Však by k úplnému vyčerpání celé látky bylo potřeba též celé a myslím dosti velké knihy, jež tedy ještě čeká na svého tvůrce.

Laskavý čtenář najde v dalších odstavcích tohoto článku též příspěvek k řešení právě zmíněného problému a to v úvahách o sviplém vrhu ve vakuu a v gravitačním poli sbíhavém, řídicím se Newtonovým zákonem.

V dalších odstavcích pak přikračuji k vlastnímu problému střelby s planety na planetu. Avšak omezují se jen na vyřešení matematických vztahů pro dobu letu a rychlost střel vržených s povrchu jednoho nebeského tělesa na druhé těleso nebeské po spojnici jejich gravitačních středů a za předpokladů, že vzdálenost obou hvězd jest neproměnná, a že na letící střely nepůsobí jiné síly, kromě gravitačních sil obou hvězd, kteréž gravitační síly pak se řídí přesně Newtonovým zákonem o gravitaci.

Nemohu bráti v počet odpor vzduchu, jež by musila překonati střela vržená na př. se země, aby proletěla se dna vzdušného oceánu

*) Plukovník Josef Kozák: Geschossbewegung im Vakuum. Wien 1909.

**) „Festschrift Ludwig Boltzmann usw.“ Leipzig 1904.

zemského na jeho povrch. A to prostě jen proto, že dnes nevíme ještě ničeho o velikosti, jaké by nabyl tento odpor vzduchu při oněch, vzhledem k dnešním poměrům ohromných počátečních rychlostech střel, jež by zde přišly v úvahu.

O prostoru vesmíru smím předpokládati, že by letící střele nekladl překážek, jako neklade překážek též hvězdám, jež se v něm pohybují s velikými rychlostmi.

Předpokládám dále, že by na uvažované střely nepůsobila též gravitace jiných planet (nebo Slunce) a že se během letu střely nemění vzdálenost uvažovaných dvou hvězd, mezi nimiž se střela pohybuje. Je však dobře známo, že oba tyto předpoklady by ve skutečnosti nikdy nebyly zcela splněny. Z těchto všech důvodů výpočet vztahů, jež odvodím, nebude zcela přesný a bude vyžadovati aspoň korekčních členů pro vlivy zanedbané. Odvozené vztahy budou mít ráz prvních přiblížení.

Domnívám se, že tyto mé úvahy, jež dále podávám, mají aspoň význam byť jen částečného osvětlení problému, jímž se zde zabývám, ukazující současně jeho velikou nesnadnost a (pro posavadní lidské prostředky mathematické) obecnou neřešitelnost.

Charbonnier v úvodu k svému skvělému dílu „Traité de balistique extérieure“ nazývá vnější balistiku „pozemskou větví astronomie“. Látka tohoto pojednání jest vskutku na rozhraní balistiky a astronomie.

Svislý vrh ve vakuu v gravitačním poli hvězdy (země), řídícím se zákonem Newtonovým.

Uvažovanou hvězdou budiž koule o poloměru R_0 . Gravitační síla, kterou tato hvězda působí na všechny hmoty ve svém okolí, působí do středu hvězdy. Velikost této síly gravitační vyjadřujeme součinem z hmoty m , na niž síla působí a z intensity gravitačního pole g . Podle zákona Newtonova ubývá této intensity g se čtvercem vzdálenosti R uvažované hmoty m od středu hvězdy. Střed tento označme S .

Geometrickým místem bodů v okolí hvězdy, v nichž má intensita jejího gravitačního pole stejnou velikost g , jest tedy plocha kulová o poloměru R . Plocha tato jest též geometrickým místem stejné potenciální energie, nazývá se plochou ekvipotenciální. Plochou ekvipotenciální jest též kulový povrch hvězdy, na němž intensita gravitačního pole má velikost g_0 .

Platí tedy

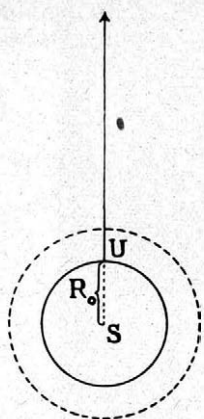
$$g : g_0 = \frac{1}{R^2} : \frac{1}{R_0^2},$$

čili

$$gR^2 = g_0 R_0^2 = \mu \dots \dots \dots (1)$$

Součin z intensity gravitačního pole a kvadrátu vzdálenosti od středu hvězdy jest tedy konstantou, kterou jsme označili μ . Známe-li tuto konstantu μ , můžeme si intensitu gravitačního pole v libovolné vzdálenosti R od středu uvažované hvězdy vyjádřiti podílem

$$g = \frac{\mu}{R^2}$$



Obč.1.

Předpokládejme platnost zákona o zachování energie ve vesmíru. Z libovolného bodu U na kulovém povrchu uvažované hvězdy vrhneme střelu v hmotě m svisle vzhůru, tedy v prodloužení poloměru $R_0 = SU$, počáteční rychlostí V_0 . Rychlost stoupající střely bude klesati. Označme písmenou v proměnnou rychlost střely, příslušnou její vzdálenosti R od středu S .

Práce, kterou střela vykoná překonáváním gravitační síly $m \cdot g$ na dráze $R - R_0$ projeví se ve změně kinetické energie střely $\frac{mV_0^2}{2} - \frac{mv^2}{2}$

Podle tohoto zákona o zachování energie tedy bude

$$\frac{mV_0^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = m \cdot \int_{R_0}^R g \, dR \quad \dots \quad (2)$$

Dosadíme-li do této rovnice ze vztahu 1 za $g = \frac{\mu}{R^2}$ a krátíme-li m , obdržíme po úpravě pro čtverec rychlosti v výraz

$$v^2 = V_0^2 - 2\mu \cdot \int_{R_0}^R \frac{dR}{R^2},$$

z něhož integrací plyne ihned

$$v^2 = V_0^2 - \frac{2\mu}{R_0} + \frac{2\mu}{R},$$

čili

$$v^2 - \frac{2\mu}{R} = V_0^2 - \frac{2\mu}{R_0} = V_0^2 - 2g_0 \cdot R_0 = A \quad \dots \quad (3)$$

Pro daný určitý případ ($V_0, \mu = g_0 R_0^2, R_0$) jest rozdíl $V_0^2 - \frac{2\mu}{R_0} = V_0^2 - 2g_0 R_0 = A$ konstantou, kterou jsme označili písmenou A .

Zavedeme-li za rychlost v diferenciální podíl $v = \frac{dR}{dt}$, pak můžeme rovnice 3 psáti ve tvaru

$$v = \frac{dR}{dt} = \sqrt{A + \frac{2\mu}{R}} = \sqrt{\frac{AR + 2\mu}{R}},$$

z něhož ihned plyne

$$dt = \sqrt{\frac{R}{2\mu + AR}} \cdot dR \quad \dots \quad (4)$$

Integrací dostaneme odtud výraz pro dobu letu střely vržené s povrchu (R_0) hvězdy svisle vzhůru a sice dobu, již tato střela potřebuje, aby dospěla do vzdálenosti R od středu S dané hvězdy. Měříme čas t od okamžiku, kdy střela opouští povrch (R_0) uvažované hvězdy. Tehdy má rychlost V_0 ; $t = 0$.

Jest tedy

$$t = \int_{R_0}^R \sqrt{\frac{R}{2\mu + AR}} \cdot dR \quad \dots \quad (4')$$

Pro provedení integrace tohoto integrálu, kde za znaménkem integračním máme iracionální funkci neodvisle proměnné R , jest výhodné zavést substituci

$$v^2 = A + \frac{2\mu}{R} \quad (3)$$

na místo R co neodvisle proměnnou rychlost střely v . Jest pak podle rovnice 3

$$R = \frac{2\mu}{v^2 - A},$$

odkudž differencováním obdržíme

$$dR = - \frac{4\mu \cdot v \cdot dv}{(v^2 - A)^2}.$$

Dosadíme-li tuto hodnotu do vztahu $dt = \frac{dR}{v}$, obdržíme ihned

$$dt = - \frac{4\mu dv}{(v^2 - A)^2} \quad (5)$$

odkudž integrací v mezích V_0 , v dostáváme ihned

$$t = -4\mu \cdot \int_{V_0}^v \frac{dv}{(v^2 - A)^2} \quad (5')$$

t. j. integrál z jednoduché racionální funkce lomené.

Při řešení integrálu

$$\int_{V_0}^v \frac{dv}{(v^2 - A)^2} \quad (6)$$

rozeznáváme tři různé případy, dané velikostí konstanty A .

Případ první. Budiž A veličina kladná, tedy $A > 0$.

Pak však jest podle rovnice 3

$$V_0^2 - 2g_0 R_0 > 0$$

čili

$$V_0^2 > 2g_0 R_0,$$

$$V_0 > \sqrt{2g_0 R_0}.$$

Je-li uvažovanou hvězdou Země a bereme-li pro ni $g_0 = 9.8149$ m/sek., $R_0 = 6377.4$ km*), plynulo by odtud, že počátečná rychlost střely V_0 musela by v tomto případě býti větší než 11.189 km/sek.

Označme funkci

$$(v^2 - A)^2 = [(v - \sqrt{A}) \cdot (v + \sqrt{A})]^2 = Q^2(v)$$

a rozviňme její převratnou hodnotu v součet zlomků s konstantními čitateli:

$$\frac{1}{Q^2(v)} = \frac{1}{(v^2 - A)^2} = \frac{C_1}{(v - \sqrt{A})^2} + \frac{C_2}{(v + \sqrt{A})^2} + \frac{D_1}{v - \sqrt{A}} + \frac{D_2}{v + \sqrt{A}}$$

*) Hodnota Besselova.

Čitatele C_1, C_2, D_1, D_2 těchto zlomků určíme podle předpisů známých z počtu integrálního. Podle nich jest

$$C_1 = \frac{1}{Q'^2(\sqrt{A})}, \quad C_2 = \frac{1}{Q'^2(-\sqrt{A})}, \quad D_1 = \frac{-Q''(\sqrt{A})}{Q'^3(\sqrt{A})}, \quad D_2 = -\frac{Q''(-\sqrt{A})}{Q'^3(-\sqrt{A})}$$

Dosadíme-li tedy za v kořeny $\sqrt{A}, -\sqrt{A}$ do výrazů

$$Q'(v) = 2v, \quad Q''(v) = 2, \quad Q'^2(v) = 4v^2, \quad Q'^3(v) = 8v^3,$$

pak obdržíme pro hledané čitatele hodnoty

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{4A}; \quad D_1 = -\frac{1}{4A^{3/2}}; \quad D_2 = \frac{1}{4A^{3/2}}.$$

Jest tedy

$$\frac{1}{Q^2(v)} = \frac{1}{(v^2 - A)^2} = \frac{1}{4A} \cdot \left[\frac{1}{(v - \sqrt{A})^2} + \frac{1}{(v + \sqrt{A})^2} + \frac{1}{\sqrt{A}} \cdot \left(\frac{1}{v + \sqrt{A}} - \frac{1}{v - \sqrt{A}} \right) \right] \quad (7)$$

Dosaďme nyní rozhodnutí 7 do integrálu 6 obdržíme

$$\int \frac{dv}{(v^2 - A)^2} = \frac{1}{4A} \cdot \left[\int \frac{dv}{(v - \sqrt{A})^2} + \int \frac{dv}{(v + \sqrt{A})^2} + \frac{1}{\sqrt{A}} \left(\int \frac{dv}{v + \sqrt{A}} - \int \frac{dv}{v - \sqrt{A}} \right) \right],$$

čili

$$-\int \frac{dv}{(v^2 - A)^2} = \frac{1}{4A} \cdot \left[-\frac{1}{v - \sqrt{A}} - \frac{1}{v + \sqrt{A}} + \frac{1}{\sqrt{A}} \{ \lg(v + \sqrt{A}) - \lg(v - \sqrt{A}) \} \right],$$

nebo

$$-\int \frac{dv}{(v^2 - A)^2} = \frac{1}{4A} \cdot \left[\frac{2v}{v^2 - A} + \frac{1}{\sqrt{A}} \cdot \lg \frac{v - \sqrt{A}}{v + \sqrt{A}} \right] \quad (6')$$

Dosadíme-li tento právě vypočtený výraz 6' do rovnice 5', dostaneme pro dobu letu střely vzorec

$$t = -4\mu \cdot \int_{V_0}^v \frac{dv}{(v^2 - A)^2} = \frac{\mu}{A} \left[\frac{2v}{v^2 - A} + \frac{1}{\sqrt{A}} \cdot \lg \frac{v - \sqrt{A}}{v + \sqrt{A}} \right],$$

čili

$$t = \frac{\mu}{A} \left[\frac{2v}{v^2 - A} - \frac{2V_0}{V_0^2 - A} + \frac{1}{\sqrt{A}} \cdot \lg \frac{(v - \sqrt{A}) \cdot (V_0 + \sqrt{A})}{(v + \sqrt{A}) \cdot (V_0 - \sqrt{A})} \right] \quad (8)$$

Když dále do této rovnice 8 dosadíme ještě za $v = \sqrt{A + \frac{2\mu}{R}}$, za $[V_0^2 - A = 2g_0 R_0]$ ze vztahů 3, obdržíme konečně

$$t = \frac{1}{A} \cdot \left[\sqrt{R(AR + 2\mu)} - V_0 R_0 + \frac{\mu}{\sqrt{A}} \cdot \lg \frac{(V_0 + \sqrt{A}) \left(\sqrt{A + \frac{2\mu}{R}} - \sqrt{A} \right)}{(V_0 - \sqrt{A}) \left(\sqrt{A + \frac{2\mu}{R}} + \sqrt{A} \right)} \right] \quad (9)$$

Tento vzorec, v němž jest $A = V_0^2 - 2g_0 R_0$, $\mu = g_0 R_0^2$, vyjadřuje nám závislost doby letu střely t na vzdálenosti R střely od středu hvězdy S , byla-li střela s povrchu uvažované hvězdy (g_0, R_0) vržena v prodloužení poloměru SU (U = ústí děla) do vesmíru s počáteční rychlostí $V_0 > \sqrt{2g_0 R_0}$ za předpokladu, že střela tato letí vakuem.

Dosadíme-li v tomto vzorci 9 za $v = \emptyset$ neobdržíme pro dobu letu střely reálné hodnoty t , neboť pak jest

$$t_{v=\emptyset} = \frac{\mu}{A} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{A}} \cdot \lg(-1) \frac{V_0 + \sqrt{A}}{V_0 - \sqrt{A}} - \frac{2V_0}{V_0^2 - A} \right]$$

Poněvadž zlomek $\frac{V_0 + \sqrt{A}}{V_0 - \sqrt{A}}$ jest kladný, je v tomto výrazu pro dobu $t_v = 0$ obsažen logarithmus záporného čísla.

Rychlost střely se stále zmenšuje se zvětšováním vzdálenosti R , jest však (pokud jest $\frac{2\mu}{R} > 0$, t. j. $R < \infty$) stále větší než $\sqrt{A}$, jak jest ihned patrné ze vzorce

$$v = \sqrt{A + \frac{2\mu}{R}} \dots \dots \dots (3)$$

Kdežto zlomek $\frac{V_0 + \sqrt{A}}{V_0 - \sqrt{A}}$ v logarithmu ve vzorci 8 jest neměnná

konstanta určité uvažované dráhy, blíží se zlomek $\frac{v - \sqrt{A}}{v + \sqrt{A}}$ s klesá-

jící rychlostí v k hodnotě nulové, když rychlost střely klesá na hodnotu $v = \sqrt{A}$. To však nastane (viz 3) teprve, když vzdálenost R vzroste na hodnotu nekonečně velkou. Jak tedy jest z těchto vývodů patrné, vzdalovala by se v tomto případě uvažovaná střela stále víc a více od hvězdy, s jejíhož povrchu byla vystřelena, až do nekonečna, při čemž by její rychlost stále klesala, blíže se asymptoticky hodnotě $v = \sqrt{A} = \sqrt{V_0^2 - 2g_0 R_0}$, na níž by poklesla teprve po době nekonečně dlouhé a v nekonečnu.

Kdybychom předpokládali, že veškerá hmota hvězdy je soustředěna v jejím středu, tedy v mathematickém bodě a dosadili do rovnice 8 za $v = \infty$, nebo do rovnice 9 za $R = 0$, obdrželi bychom

$$t = \frac{\mu}{A} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{A}} \lg \frac{V_0 + \sqrt{A}}{V_0 - \sqrt{A}} - \frac{2V_0}{V_0^2 - A} \right]$$

co dobu letu střely padající bez překážek se vzdálenosti R_0 až ke středu hvězdy S , když střela na počátku tohoto času měla ve vzdálenosti R_0 od středu S rychlost počáteční $V_0 > \sqrt{2g_0 R_0}$.

Vzorec poslední má ovšem jen mathematický význam.

*Příklad 1.: Pro Zemi jest $g_0 = 0.0098149 \text{ km/sec}^2$ *, $R_0 = 6377.4 \text{ km}$. Tedy jest $2g_0 R_0 = 125.19$, $\sqrt{2g_0 R_0} = 11.189 \text{ km/sec}$. Země obíhá kol slunce s postupnou rychlostí asi 30 km/sec . Se země budiž do vesmíru svíste (t. j. v prodloužení poloměru R_0) vržena střela s počáteční rychlostí $V_0 = 30 \text{ km/sec}$.*

Podle rovnice 3 jest $A = V_0^2 - 2g_0 R_0 = 900 - 125.19 = 774.81$.

Jakou rychlost v bude mít tato střela ve vzdálenosti $X_1 = 345.670 \text{ km}$ od středu země? K výpočtu použijeme rovnice 3, podle níž jest

$$v = \sqrt{A + \frac{2\mu}{X_1}}$$

Z rovnice 1 jest $\mu = g_0 R_0^2 = 408.490$, tedy $\frac{2\mu}{X_1} = 2.3097$,

$v = \sqrt{774.81 + 2.3097}$ čili $v = 27.877 \text{ km/sec}$.

*) Značí urychlení tíže zemské na rovníku. Data o gravitačním poli země a měsíce, jakož i poloměry těchto hvězd a jejich (střední) vzdálenost, jsou vzaty ze Strouhalovy knihy „Mechanika“, 1910. Těchto dat použijeme při číselném vyřešení různých příkladů.

Za jakou dobu dospěje uvažovaná střela do dané vzdálenosti X_1 ?

K výpočtu použijeme vzorce 8, v němž jest (podle rovnice 3)

$$v^2 - A = \frac{2\mu}{X_1} = 2.3097; V_0^2 - A = 2 g_0 R_0 = 125.19; v = 27.877$$

$$\sqrt{A} = \sqrt{774.81} = 27.836; \frac{2v}{v^2 - A} = 24.1395; \frac{2V_0}{V_0^2 - A} = 0.47927$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do rovnice 8, obdržíme

$$t = \frac{408.490}{774.81} \cdot \left[24.1395 - 0.47927 + \frac{1}{27.836} \cdot \lg \frac{0.041 \times 57.836}{55.713 \times 2.164} \right] = 12158 \text{ sek.}$$

čili $t = 3$ hodiny 22 minut 38 vteřin. Kdyby uvažovaná střela proletěla dráhu $X_1 - R_0 = 345670 - 6377 = 339293$ km pohybem rovnoměrným s rychlostí 30 km/sek., potřebovala by k tomu doby 11310 vteřin, tedy jen o 14 minut 8 vteřin méně než by potřebovala v Newtonově gravitačním poli zemském.

Jakou rychlost v bude mít tato střela ve vzdálenosti $D = 60.275 \times R_0$ od zemského středu? $D = 60.275 \cdot R_0 = 384390$ km jest střední vzdálenost měsíce od zeměkoule. Podle vzorce 3 jest zase

$$v = \sqrt{A + \frac{2\mu}{D}} = \sqrt{774.81 + 2.077} = 27.873 \text{ km/sek.}$$

Jest patrné, že na dráze $D - X_1 = 384390 - 345670 = 38720$ km by rychlost střely poklesla jen o poměrně nepatrnou hodnotu 0.004 km/sek.

Jaké doby by potřebovala uvažovaná střela, aby dospěla do vzdálenosti D ?

Dosadíme do vzorce 8 za $v^2 - A = \frac{2\mu}{D} = 2.077$; $\frac{2v}{v^2 - A} = 26.839$;

$$\frac{2V_0}{V_0^2 - A} = 0.47927, \text{ obdržíme}$$

$$t = \frac{408.490}{774.81} \left[26.839 - 0.47927 + \frac{1}{27.836} \cdot \lg \frac{0.037 \times 57.836}{55.709 \times 2.164} \right]$$

čili

$$t = 13548 \text{ sek.} = 3 \text{ hodiny } 45 \text{ minut } 48 \text{ vteřin.}$$

Ke které hodnotě limituje rychlost uvažované střely, vzdaluje-li se střela do nekonečna? Ze vzorce 3 obdržíme pro $R = \infty$

$$v = \sqrt{A} = 27.836 \text{ km/sek.}$$

Případ druhý. Budiž $A = 0$, t. j. podle rovnice 3

$$V_0^2 = 2 g_0 R_0; V_0 = \sqrt{2 g_0 R_0}$$

Pro Zemi by v tomto případě tedy bylo potřebí počáteční rychlosti asi $V_0 = 11.189$ km/sek.

Pak se integrál 6 zjednoduší na tvar

$$t = -4\mu \cdot \int_{V_0}^v \frac{dv}{v^4}, \dots \dots \dots (10)$$

jehož integraci ihned obdržíme

$$t = \frac{4}{3} \mu \cdot \left[\frac{1}{v^3} - \frac{1}{V_0^3} \right] \dots \dots \dots (11)$$

Dosadíme-li do tohoto vzorce 11 zase za $\mu = g_0 R_0^2$ z rovnice 1, resp

za $v = \sqrt{\frac{2\mu}{R}}$, $V_0 = \sqrt{\frac{2\mu}{R_0}}$, obdržíme po úpravě

$$t = \frac{2}{3\sqrt{2g_0 R_0^2}} \cdot [\sqrt{R^3} - \sqrt{R_0^3}] \dots \dots \dots (12)$$

Vzorec tento plyne též ihned z integrálu 4', položíme-li v něm $A = \emptyset$. Neboť pak obdržíme

$$t = \int_{R_0}^R \sqrt{\frac{R}{2\mu}} dR = \frac{1}{\sqrt{2\mu}} \cdot \int_{R_0}^R R^{1/2} dR = \frac{2}{3R_0\sqrt{2g_0}} \cdot [R^{3/2} - R_0^{3/2}]$$

Ze vzorce 11 plyne, že jest $t = \infty$ pro $v = \emptyset$, kdy jest současně $R \infty$, jak praví vztah 12. Střela vystřelená z libovolného bodu U na povrchu hvězdy (g_0 , R_0) počátečnou rychlostí $V_0 = \sqrt{2g_0 R_0}$ v prodloužení poloměru hvězdy SU do vzduchoprázdného vesmíru, nevrátí se již nikdy zpět. Její rychlost v stále klesá, až po nekonečně dlouhé době letu po přímce SU by v nekonečno poklesla na nulovou hodnotu.

Předpokládáme-li zase veškerou hmotu hvězdy soustředěnu v jejím středu S a dosadíme-li pak do vzorce 11 za $v = \infty$, po př. do vzorce 12 za $R = \emptyset$, obdržíme

$$t = -\frac{4\mu}{3} \cdot \frac{1}{V_0^3} = \frac{4g_0 R_0^2}{3 \cdot |V_0|^3}$$

Poněvadž pak jest $|V_0| = \sqrt{2g_0 R_0}$, tedy dostaneme

$$t = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{R_0}{2g_0}}$$

co dobu letu, již by střela potřebovala, aby proletěla vzdálenost R_0 dělicí ji od hvězdy (bodu S), když by na počátku tohoto pohybu měla rychlost $V_0 = \sqrt{2g_0 R_0}$ a když by se na této dráze nesetkávala s žádným odporem. Význam posledních vzorců jest zase jen matematický.

Příklad 2.: Střela byla vržena se zeměkoule »svisle« vzhůru počátečnou rychlostí $V_0 = \sqrt{2g_0 R_0} = 11.189$ km/sek.

Jaká bude její rychlost ve vzdálenosti $X_1 = 345670$ km od středu zemského?

Pro $A = \emptyset$ plyne z rovnice 3

$$v = \sqrt{\frac{2\mu}{X_1}}; \frac{2\mu}{X_1} = 2.3097 \text{ (viz příklad 1.)}$$

Tedy jest

$$v = \sqrt{2.3097} = 1.5198 \text{ km/sek.}$$

Za jakou dobu dospěje tato střela do vzdálenosti X_1 ? K výpočtu použijeme vzorce 11

$$t = \frac{4}{3} \cdot \mu \cdot \left[\frac{1}{v^3} - \frac{1}{V_0^3} \right]$$

Vypočteme ze známých hodnot $v = 1\cdot5198$, $V_0 = 11\cdot189$ hodnoty

$$\frac{1}{v^3} = 0\cdot2849 ; \frac{1}{V_0^3} = 0\cdot000714$$

a po dosazení ($\mu = 408490$) obdržíme

$$t = \frac{4}{3} \cdot 408490 \cdot [0\cdot2849 - 0\cdot000714] = 151260 \text{ sek.},$$

čili $t = 1$ den 18 hodin 1 minuta.

Jaká bude rychlost této střely ($V_0 = 11\cdot189$ km/sek) ve vzdálenosti $D = 384390$ km od zemského středu? (D je stř. vzdálenost měsíce.)

Zase obdržíme z rovnice 3

$$v = \sqrt{\frac{2\mu}{D}} ; \frac{2\mu}{D} = 2\cdot077,$$

tedy

$$v = \sqrt{2\cdot077} = 1\cdot4412 \text{ km/sek.}$$

Na dráze $D - X_1 = 38720$ km poklesne rychlost střely o $0\cdot0786$ km/sek, tedy mnohem více než poklesla (o $0\cdot004$ km/sek) na téže dráze v příkladě 1.

Za jakou dobu dospěje uvažovaná střela do vzdálenosti D? K výpočtu uijeme zase vzorce 11. Ze známých hodnot $v = 1\cdot4412$ km/sek.,

$V_0 = 11\cdot189$ km/sek. vypočteme $\frac{1}{v^3} = 0\cdot33407$, $\frac{1}{V_0^3} = 0\cdot000714$, tedy

$$t = \frac{4}{3} \cdot 408490 \cdot [0\cdot33407 - 0\cdot000714] = 177440 \text{ sek.},$$

čili $t = 2$ dny 1 hodina 17 minut 20 vteřin.

Příklad 3.: Jak velikou počátečnou rychlost V_0 by bylo potřeba udělit střele vržené s měsíce v prodloužení měsíčního poloměru, aby se na své dráze stále vzdalovala do nekonečna? Pro měsíc jest $g_0 = 165\cdot35$ cm/sek.² $= 0\cdot0016535$ km/sek.² $R_0 = 1740\cdot8$ km, tedy

$$V_0 \geq \sqrt{2g_0 R_0} \geq 2\cdot3993 \text{ km/sek.}$$

Příklad 4: Střela byla vržena s měsíce počátečnou rychlostí $V_0 = 2\cdot3993$ km/sek svisle vzhůru. Jaká bude její rychlost ve vzdálenosti $D - X_1 = 38720$ km od gravitačního středu měsíce a jaké doby bude potřebovat, aby dospěla do této vzdálenosti $D - X_1$ od měsíčního středu?

Ze vzorce 3 obdržíme zase pro $A = \emptyset$

$$v = \sqrt{\frac{2\mu}{D - X_1}}$$

kdež (podle rovnice 1) značí $\mu = g_0 \cdot R_0^2 = 0\cdot0016535 \cdot 1740\cdot8^2 = 5010\cdot5$; tedy dostaneme $v = 0\cdot50873$ km/sek.

Pro výpočet doby t uijeme opět vzorce 11. Z hodnot $v = 0\cdot50873$,

$V_0 = 2\cdot3993$ stanovíme $\frac{1}{v^3} = 7\cdot595$, $\frac{1}{V_0^3} = 0\cdot0724$ a dosadíme do vzorce 11, takže obdržíme

$$t = \frac{4}{3} \cdot 5010\cdot5 \cdot [7\cdot595 - 0\cdot0724] = 50256 \text{ sek.}$$

čili $t = 13$ h. 57 m. 36 sek.

Případ třetí: Budiž $A < \emptyset$. Pak jest podle rovnice 3

$$V_0^2 - 2g_0 R_0 < \emptyset$$

t. j.

$$V_0^2 < 2g_0 R_0$$

čili

$$V_0 < \sqrt{2g_0 R_0}$$

Pro Zemi tedy by mělo býti $V_0 < 11 \cdot 189$ km/sek.

Označme absolutní hodnotu veličiny A písmenou

$$|A| = -A = a.$$

V tomto případě integrál 6 nabývá tvaru

$$\int_{V_0}^v \frac{dv}{(v^2 + a)^2} \dots \dots \dots (13)$$

kdež a jest kladná konstanta. Provedme jeho integraci

$$\text{Substitucí } v = \sqrt{a} \cdot x \dots \dots \dots (14)$$

zavedme novou proměnnou. Pak jest $dv = \sqrt{a} \cdot dx$, tedy

$$\int \frac{dv}{(v^2 + a)^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \int \frac{\sqrt{a} \, dx}{(1 + x^2)^2} = a^{-3/2} \cdot \int \frac{dx}{(1 + x^2)^2} \dots (13')$$

Integrál

$$I_2 = \int \frac{dx}{(1 + x^2)^2} \dots \dots \dots (15)$$

se vyřeší pomocí redukčního vzorce, jak odvodíme ihned pro obecnější integrál

$$I_n = \int \frac{dx}{(1 + x^2)^n}, \dots \dots \dots (16)$$

v němž jest exponent n číslo celé, $n > \emptyset$.

Integrál I_n (16) integrujme po částech. Při tom označme

$$\frac{1}{(1 + x^2)^n} = \varphi; \quad x = \psi.$$

Jest tedy

$$\varphi' = -\frac{2nx}{(1 + x^2)^{n+1}}; \quad \psi' = 1.$$

Obecně platí

$$\int \varphi \cdot \psi' \cdot dx = \varphi \cdot \psi - \int \varphi' \cdot \psi \cdot dx.$$

Dosadíme-li do této rovnosti za $\varphi, \psi, \varphi', \psi'$ výše uvedené výrazy, obdržíme

$$\int \frac{dx}{(1 + x^2)^n} = \frac{x}{(1 + x^2)^n} + 2n \cdot \int \frac{x^2 dx}{(1 + x^2)^{n+1}} \dots \dots (17)$$

Avšak jest

$$\int \frac{x^2 dx}{(1 + x^2)^{n+1}} = \int \frac{1 + x^2}{(1 + x^2)^{n+1}} dx - \int \frac{dx}{(1 + x^2)^{n+1}},$$

čili

$$\int \frac{x^2 dx}{(1 + x^2)^{n+1}} = \int \frac{dx}{(1 + x^2)^n} - \int \frac{dx}{(1 + x^2)^{n+1}},$$

což dosadíme do rovnice 17. Obdržíme

$$\int \frac{dx}{(1 + x^2)^n} = \frac{x}{(1 + x^2)^n} + 2n \int \frac{dx}{(1 + x^2)^n} - 2n \int \frac{dx}{(1 + x^2)^{n+1}} \dots (17')$$

Zavedeme-li označení

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = I_n ; \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = I_{n+1},$$

pak můžeme rovnici 17' psáti ve tvaru

$$I_n = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \cdot I_n - 2n \cdot I_{n+1},$$

z něhož ihned plyne redukční vzorec

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} \cdot I_n + \frac{x}{2n(1+x^2)^n}.$$

Pro $n=1$ dává nám tento vzorec $I_{n+1} = I_2$, totiž

$$I_2 = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dx}{1+x^2} + \frac{x}{2(1+x^2)}.$$

Víme však, že jest

$$I_1 = \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x,$$

tedy hledaná (15) hodnota integrálu I_2 jest

$$\int I_2 = \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \cdot \arctg x \quad \dots (15')$$

Dosadíme-li do tohoto výsledku ze substituce 14 zase zpět za $x = \frac{v}{\sqrt{a}}$, dostaneme hledanou hodnotu integrálu 13':

$$\int \frac{dv}{(v^2+a)^2} + \frac{1}{a^{3/2}} \cdot I_2 = \frac{1}{a^{3/2}} \cdot \left[\frac{\frac{v}{\sqrt{a}}}{2 \left[\frac{v^2}{a} + 1 \right]} + \frac{1}{2} \cdot \arctg \frac{v}{\sqrt{a}} \right],$$

čili

$$\int \frac{dv}{(v^2+a)^2} = \frac{1}{a} \cdot \left[\frac{v}{2(v^2+a)} + \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \arctg \frac{v}{\sqrt{a}} \right] \dots (13'')$$

(Příště dále.)

VOJENSTVÍ DOMA A V CIZINĚ.

Zahájení nového studijního roku na Válečné škole.

4. listopad t. r., den slavnostní rektorské instalace na universitě Karlově, nejstarším našim vysokým učení, byl současně slavnostním výročním dnem Válečné školy, naší nejmladší vojenské vysoké školy. Toho dne o 10. hodině dopolední zahájen byl slavnostně nový studijní rok Válečné školy, první to rok, v němž počínají své studie současně dva ročníky posluchačů: první ročník, složený z posluchačů, kteří budou studovati na škole po dvě leta, druhý, obsahující důstojníky, kteří absolvovali již dříve některý z kursů býv. školy pro výchovu důstojníků generálního štábu a kteří pobudou na Válečné škole pouze jeden rok, aby své teoretické vzdělání ve službě generálního štábu doplnili a dokončili. Posluchačů prvního ročníku, kteří byli vybráni přísnou soutěží z celé armády, jest celkem 16, z nich 2 majori, 3 štábní kapitáni, 8 kapitanů, 3 nadporučíci. Ve druhém ročníku jest posluchačů 50, mezi nimi 4 podplukovníci, 4 majori, 18 štábních kapitanů, 23 kapitáni, 1 nadporučík. Sluší zmíniti se, že dva z posluchačů jsou hosté z ciziny, a to důstojníci litevské armády, jeden, kapitan, v prvním ročníku, druhý, podplukovník, v ročníku druhém.